

追求明牌
國立高雄大學應用數學系
黃文璋

1. 明牌與名牌

何謂明？<<爾雅釋言>>：明，朗也。<<廣韻庚韻>>：明，光也。<<易繫辭下>>：日往則月來，月往則日來，日月相推而明生焉。明還有很多意思，大部分是好的，如明亮，明白，明察，聰明，賢明，神明。又如以明天、明年表次日、次年，即含有對未來存有盼望，希望它是“明”的。

至於名呢？通常意思也均不錯，名字、名分、名目、功名、成名、有名等，總是代表一種好的名聲。

時至今日，則明牌、名牌充斥。玩樂透彩、進股市要買明牌，逛街購物要買名牌。明牌與名牌成了大家所嚮往的。名牌與高價位往往密不可分，追求名牌會千金散盡不復回，是可以理解的。但在樂透世界裡，追求明牌，常也沒有什麼好下場，所謂我本將心向明月，誰知明月照溝渠。究竟是怎麼回事。

在論語衛靈公篇，子貢問曰：「有一言而可以終身行之者乎？」子曰：「其恕乎！己所不欲，勿施於人。」這不就是弟子向孔子求明牌嗎？求的是終身奉行的準則。

求明牌倒沒有什麼不對，只是往往人們追求的是名牌，誤把名牌當明牌。要知顧名思義，名牌是較易認出的，明牌則常不是那麼容易分辨的。名牌有時也是明牌。劉備在見到諸葛亮之前，已從司馬徽及徐庶處，對諸葛亮佩服不已。所謂此人有經天緯地之才，管仲、樂毅不及，若得此人，無異周得呂望，漢得張良也。大家也知道劉備得了諸葛亮，才有後來的三分天下。這就是名牌也是明牌的一個例子。至於名牌而非明牌的例子，則不勝枚舉，名不副實，浪得虛名者，充斥於歷史上。我們應該是要明牌而非名牌。

2. 是否有明牌？

在樂透世界裡，是否有明牌存在呢？目前北銀的樂透彩是由 1 至 42 的號碼中，隨機地產生 6 個頭獎號碼，我們稱為 42 取 6。一般可以有 n 取 r 的樂透彩。在 42 取 6 的樂透彩裡，頭獎號碼為

$$\binom{42}{6} = 5,245,786$$

組中的某一組，每一組都有相同的機率產生。即任何一組號碼會是頭獎號碼的機率為

$$\frac{1}{5,245,786}。$$

這個機率當然很低，要憑運氣中獎實在很難，最好是能知道那一組號碼，或者是那幾個號碼比較可能出現。也就是有沒有明牌？

921 地震與 331 地震，間隔了 921 天，可見 921 三個數字是很特別的。這一期會開出這組頭獎號碼，可見此 6 個號碼碼氣很旺，下一期說不定也會出現。有些號碼的確出現的較頻繁，39 號還連續出現 5 次。印證是有較熱門的號碼。令人懷疑號碼並非隨機地產生。明牌似乎是有的。神啊！許我一個明牌吧！

究竟號碼是不是隨機地出現呢？

3. 你了解隨機嗎？

隨機常與機會均等、均勻分佈等同義。先看底下的例子。

例 1. 假設有 2 個箱子，將 2 個球分別隨機地放進其中一箱。即每一個球均有 $1/2$ 的機率放進任何一箱中。而每箱中各恰有一球的機率為

$$\frac{2!}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}。$$

如果是 3 個球隨機地放進 3 個箱子中，則每箱中各恰有一球的機率為

$$\frac{3!}{3^3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}。$$

如果是 10 個球隨機地放進 10 個箱子中，則每箱中各恰有一球的機率為

$$\frac{10!}{10^{10}} = \frac{3,628,800}{10^{10}} = 0.00036288。$$

n 個球隨機地放進 n 個箱子中，則每箱中各恰有一球的機率為 $n!/n^n$ ，此值隨著 n 之增大而漸減。

上述現象，可能違反一般人的直觀。10 個球隨機地放進 10 個箱子中，每個箱子中各恰有一個球，應是最均勻的，結果卻是極不容易發生。反而是不均勻的情況，即至少有一箱子中有兩個以上的球很容易發生，機率為

$$1 - 0.00036288 = 0.99963712 \simeq 1，$$

甚至一箱中有 2 球，8 箱中各有一球，另一空箱的機率為

$$\frac{\binom{10}{1}\binom{9}{1}\binom{10}{2} \cdot 10!}{10^{10}} = 45 \cdot \frac{10!}{10^{10}}，$$

為每箱中各恰有一球的機率之 45 倍。

令每箱中各恰有一球的機率為 a 。再給一些例子如下：

(a) 1 箱中有 3 球，7 箱中各有一球，另 2 空箱，其機率為 $60a$ 。

- (b) 2 箱中各有 3 球，2 箱中各有 2 球，另 6 空箱，其機率為 $(35/4)a$ 。
- (c) 2 箱中各有 4 球，2 箱中各有 1 球，另 6 空箱，其機率為 $(35/16)a$ 。
- (d) 1 箱中有 1 球，1 箱中有 2 球，1 箱中有 3 球，1 箱中有 4 球，另 6 空箱，其機率為 $(35/2)a$ 。
- (e) 1 箱中有 6 球，1 箱中有 2 球，2 箱中各有 1 球，另 6 空箱，其機率為 $(7/4)a$ 。
- (f) 5 箱中各有 2 球，另 5 空箱，其機率為 $(63/8)a$ 。

有些看起來很偏頗的事件，其發生的機率卻比很均勻的事件之機率高。我們引出恰有 i 個空箱的機率如下：

- (i) 0 空箱之機率為 a 。
- (ii) 1 空箱之機率為 $45a$ 。
- (iii) 2 空箱之機率為 $375a$ 。
- (iv) 3 空箱之機率為 $980a$ 。
- (v) 4 空箱之機率為 $(7609/8)a$ 。
- (vi) 5 空箱之機率為 $(2835/8)a$ 。
- (vii) 6 空箱之機率為 $(6821/144)a$ 。
- (viii) 7 空箱之機率為 $(311/168)a$ 。
- (ix) 8 空箱之機率為 $(511/40320)a$ 。
- (x) 9 空箱之機率為 $a/9!$ 。

老師上課點學生上台，每次均隨機地點，一學期下來，就是有幾位學生被點不只一次，有幾位學生卻從未被點過。

上天對每一個人可能無意有差別待遇，但結果是抱怨禍不單行者不少，慶幸好事連連者也不少。

在紅樓夢的第八回，賈寶玉去探望薛寶釵，正在閒聊。一語未了，忽聽外面的人說：『林姑娘來了。』話猶未完，黛玉已搖搖擺擺的進來，一見寶玉，便笑道：『哎喲！我來的不巧了！』寶玉等忙起身讓坐。寶釵笑道：『這是怎麼說？』黛玉道：『早知他來，我就不來了。』寶釵道：『這是什麼意思？』黛玉道：『什麼意思呢？來呢，一齊來，不來，一個也不來。今兒他來，明兒我來，間錯開了來，豈不天天有人來呢？也不至太冷落，也不至太熱鬧。姐姐有什麼不解的

呢？」

例 2. 20 個球隨機地取兩個球，每次取出後放回，兩個球皆相異之機率為

$$\frac{20}{20} \cdot \frac{19}{20} = 0.95,$$

會有重複之機率為

$$1 - 0.95 = 0.05。$$

從 $10n$ 個數，隨機地取 n 個，每次取出後放回，會有重複之機率為

$$1 - \frac{10n \cdot (10n - 1) \cdots (10n - n + 1)}{(10n)^n}。$$

母體數	樣本數	取樣重複之機率
30	3	0.098
40	4	0.143
50	5	0.186
60	6	0.227
70	7	0.226
100	10	0.372
200	20	0.626
300	30	0.777
380	38	0.853

種類愈多，愈容易有不均勻、看起來不隨機的現象。如果做芝麻餅，希望芝麻很均勻，可否隨機地撒呢？你現在知道了，不可以，否則芝麻必是有些地方很多，有些地方很稀疏。隨機下的後果，往往是不均勻。

在沈默的羔羊(The Silence of the Lambs)那部電影裡，有底下一句話：

Doesn't this random scattering site scenes desperately random, like the elaboration on bad liar.

這些隨機散佈的地點，不是極度地隨機嗎？就像差勁的騙子精心設計的謊言。

看起來很隨機，反而會像精心設計的謊言！老師點名如果是隨機地點，是很難每次都點不同的人。樂透彩，如果每個號碼出現的頻率都一樣，或連續幾期開

出的號碼都不一樣，反而才該懷疑。

事件發生的機率雖小，但從每期開出的 6 個頭獎號碼，難免可找到一些特殊性質。

例 3. 在 42 取 6 的樂透彩裡，偶數共有 21 個，從此 21 個號碼中挑 6 個，共有

$$\binom{21}{6} = 54,264 \text{ (組)}。$$

故 6 碼全為偶數之機率為

$$\frac{54,264}{5,245,786} \approx 0.0103,$$

同理，6 碼全為奇數，6 碼全在 1 至 21，6 碼全在 22 至 42，機率均約為 0.0103。

所以每期頭獎號碼全為偶數或全為奇數，或全在 1 至 21，或全在 22 至 42，其機率約為

$$4 \cdot 0.0103 = 0.0412。$$

甚至 6 碼全為 3 的倍數，全不為 3 的倍數，...，認真地找，總可從 6 碼中找到某一性質，這並不奇怪，不要因此懷疑號碼並非隨機地出現。

有些事件發生的機率並沒有想像中的小。見底下的例子。

例 4. 在 n 取 r 的樂透彩中，會有連號的機率為

$$1 - \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}}。$$

若是 42 取 6，則此機率為

$$1 - \frac{\binom{37}{6}}{\binom{42}{6}} \approx 0.5568。$$

有超過二分之一的機會有連號。因此看到連號不用太驚訝。

再看生日問題。

例 5. 一房間中 n 個人生日皆相異之機率為

$$p_n = \frac{365}{365} \frac{364}{365} \cdots \frac{365 - n + 1}{365}。$$

至少有 2 人生日相同之機率為

$$1 - p_n = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}。$$

n	4	16	20	22	23	32	40	48	56	64
$1 - p_n$.016	.284	.411	.476	.507	.753	.891	.961	.988	.997

另外，至少有一人生日與你相同之機率為

$$q_n = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n,$$

要使 $q_n > 0.5$ ，解出 $n > 253$ 。

要在一班上找到有兩人生日相同很容易，但要找到有人與“你”生日相同，很不容易。這就是所謂今生緣 vs. 他生緣。

4. 當稀有碰到大數

一件事若發生在每個人身上的機率為百萬分之一，則台灣兩千三百萬人，每天發生二十餘件是毫不稀奇的。樂透彩中獎機率雖很低，但若每一期賣出上千萬張，則有幾個人中頭獎，是很合理的。這個道理應不難弄明白。

例 6. 美國紐約時報曾在第一版(1986 年 2 月 14 日)報導一位名叫 Adams 的女士第二度贏得紐澤西(New Jersey)州的樂透彩頭獎。1985 年 10 月 24 日，她第一次得三百九十萬美元，第二次則得一百五十萬美元。這是紐澤西州第一次有人得到兩次百萬美元以上獎金的樂透彩。

第一次樂透彩是 39 取 6，中頭獎之機率為

$$\frac{1}{\binom{39}{6}} = \frac{1}{3,262,623}。$$

第二次樂透彩是 42 取 6，中頭獎之機率為

$$\frac{1}{\binom{42}{6}} = \frac{1}{5,245,786}。$$

樂透彩主辦單位說一生中中兩次頭獎之機率為

$$\frac{1}{3,262,623} \cdot \frac{1}{5,245,786} \approx \frac{1}{1.7115 \cdot 10^{13}}。$$

約十七兆分之一。

這樣算對嗎？

上述計算是假設 Adams 只在兩週買彩券：當玩法為 39 取 6 時買一張，玩法為 42 取 6 時買一張。事實上 Adams 買週買好幾張且買了好幾年。而且在第一次中頭獎後，便增加買的張數。若在 39 取 6 的玩法裡，每週買 3 張，在 42 取 6 的玩法裡每週買 5 張，則每週大約都有百萬分之一的機率中頭獎。在 4 年(約 200

期，每週一期)裡，一次頭獎皆未中的機率約為

$$\left(1 - \frac{1}{1,000,000}\right)^{200} \approx e^{-\frac{200}{1,000,000}} = e^{-\frac{1}{5,000}}。$$

中一次頭獎的機率約為

$$\frac{1}{5,000} e^{-\frac{1}{5,000}} \approx \frac{1}{5,000}，$$

中兩次頭獎的機率約為

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5,000}\right)^2 e^{-\frac{1}{5,000}} \approx \frac{1}{50,000,000}。$$

約五千萬分之一。至於一個人終身(以 30 年，1,500 期計)中兩次頭獎之機率則約為

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1,500}{1,000,000}\right) e^{-\frac{1,500}{1,000,000}} \approx 0.000001125。$$

超過百萬分之一。

不論是五千萬分之一，或百萬分之一的機率，都很小。但紐澤西州有 841 萬人，若其中有一百萬人，一生中每期皆買 5 張彩券，則會有人一生中至少中兩次頭獎之機率便很大了：

$$1,000,000 \cdot 0.000001125 = 1.125 > 1$$

$$1 - (1 - 0.000001125)^{1,000,000} \approx 1 - e^{-1.125} \approx 0.6753。$$

若有五千萬人，每期至少買 5 張彩券，則大約 4 年，便會有人中兩次頭獎了：

$$50,000,000 \cdot \frac{1}{50,000,000} = 1。$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{50,000,000}\right)^{50,000,000} \approx 1 - e^{-1} \approx 0.6322。$$

1998 年, Humphries 二度贏得賓州樂透彩頭獎，兩次合計有六百八十萬美元的獎金。

千萬不要小看大數的威力。

5. 人的天性是否有隨機性？

我翻開報紙，新聞中這麼說：

「聯合國最新統計顯示，全球人口正快速老化。到二〇二五年，慶祝百歲大壽的人，將是現在百歲人瑞的十五倍。

而一個人如果活到一百一十四歲，一生就擁有一百萬個小時可供揮霍，稱得上是『時間的百萬富翁』。未來五十年，這種長壽的『時間的百萬富翁』將與日

俱增。」

這可真是大新聞！

長壽是好事，不過可以活到一百一十四歲究竟算不算是好事，恐怕頗值得爭議。

我代替電視節目出征，站在路邊訪問經過的路人，隨機抽樣，盡量毫不偏私地呈現社會大眾的心聲。

(90年4月14日中國時報39版，三少四狀集，黃明堅專欄，題目為活到一百一十四歲如何?)

例 7. 人們有一奇怪的認知，就是覺得奇數較偶數隨機。美國有位教授曾對一班 18 位學生做下述實驗：每位學生從 1 至 20 的整數中，(自認)隨機地寫出 5 個(不重複)。

如果是簡單隨機取樣，則 5 個數中有 k 個是奇數之機率為

$$\frac{\binom{10}{k}\binom{10}{5-k}}{\binom{20}{5}}, k = 0, 1, \dots, 5。$$

下表給出觀測頻率及期望頻率，明顯地看出學生傾向寫較多的奇數。

	0	1	2	3	4	5
觀測頻率	0	3	0	9	3	3
期望頻率	0.29	2.44	6.27	6.27	2.44	0.29

例 8. 愛爾蘭國家樂透彩(Irish National Lottery)亦為 42 取 6。Boland and Pawitan(1999)曾收集三筆數據。他們在所開設的初等統計課程(那是一個大班)中，先向學生解釋何謂隨機數的生成，以及愛爾蘭國家樂透彩的玩法，然後要學生把自己當做是一隨機生成器，每人隨機地(不論大小順序)寫出一組頭獎號碼，如此得到 234 組號碼。第二筆數據是自西元 1994 年 9 月 24 日至 1997 年 3 月 8 日的樂透彩，共產生 264 組頭獎號碼。第三筆數據是以 S-Plus 統計軟體，模擬產生 264 組頭獎號碼。他們的目的是想知道個人當做隨機生成器的能力如何？

下表給出三筆數據之 Q 值。 Q 值愈大表愈不隨機。因

$$\chi_{0.90,41}^2 \doteq 52.95, \quad \chi_{0.95,41}^2 \doteq 56.94, \quad \chi_{0.99,41}^2 \doteq 64.95$$

故顯然要拒絕學生所產生的號碼符合隨機。至於不論樂透彩之中獎號碼，及 S-Plus 所產生之號碼，均符合隨機性。

數據	學生	樂透	模擬
M	234	264	264
Q	261.05	39.64	37.82
p-值	<<0.001	0.531	0.613

6. 如何挑明牌?

我們不是讓大家以為沒有明牌了嗎？那又如何排明牌呢？

德國 49 取 6 的樂透彩，共有 13,983,816 種組合，1993 年 10 月 16 日共賣出 6,803,090 張彩券，其中賣出張數超過平均 50 倍的號碼共有 2,588 組，約佔全部賣出張數的 0.038%：

$$\frac{2,588}{6,803,090} \approx 0.00038。$$

但這 2,588 組號碼共賣出 228,764 張，約佔全部賣出張數的 3.36%：

$$\frac{228,764}{6,803,290} = 0.033626。$$

我們給出最熱門的 20 組號碼。

排名	組合						張數
1	7	13	19	25	31	37	4004
2	7	14	21	28	35	42	3817
3	5	27	34	35	37	49	3698
4	1	2	3	4	5	6	3249
5	4	11	18	25	32	39	2821
6	13	19	25	31	37	43	2335
7	6	12	18	24	30	36	2288
8	9	17	25	33	41	49	2227
9	1	9	17	25	33	41	2116
10	8	16	24	32	40	48	2097
11	8	14	21	25	36	39	2083
12	6	25	27	30	34	39	1896
13	9	17	20	21	26	41	1868
14	2	10	18	26	34	42	1551
15	5	10	15	20	25	30	1527
16	44	45	46	47	48	49	1489

17	12	24	32	36	40	42	1459
18	1	10	20	30	40	49	1387
19	43	44	45	46	47	48	1341
20	1	7	22	28	43	49	1317

等差級數(No.1,2,4,5,6,7,8,9,10,14,15,16,19)，過去的頭獎號碼(No.3,11,12,13,17，No.3 為上週，No.2 為上二週，No.17 為上三週)，修改過去頭獎號碼，別國頭獎號碼，與重大事件有關的號碼，都是一般人喜愛簽注的。參了熱門號碼，若中頭獎可能不太會快樂：假設頭獎獎金為 1 億元，若 4,000 人中，則每人分得

$$\frac{100,000,000}{4,000} = 25,000 \text{ (元)}。$$

英國學者伊文(Ewen)曾說：

國家徵收樂透稅，愚人乖乖捧錢來，感謝讚美老天爺，輕輕鬆鬆錢落袋

Lotto's a taxation, On all fools in the nation, But heaven be praised, It's so easily raised.

挑選號碼有兩個簡單的規則：

1. 要盡量簽冷僻的號碼。
2. 若簽兩注以上，不要有兩注超過三碼重複。這是因中超過三碼，皆是中的人平分該獎項獎金。

最後問各位幾個問題

1. 電腦簽注好，還是人腦簽注好？
2. 包牌好不好？
3. 樂透彩之期望值為 0.56 倍，投資 10 萬元，8 期後(約一個月，且不考慮稅金)，期望值為多少錢。