

# 瘋狂樂透彩

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

民國91年1月起,台北銀行發行公益彩券,其中“樂透彩”採42選6的玩法、即自1至42的號碼中,選出六個下注(不可重覆)、只要六個號碼全中即為頭獎,與開出的號碼順序無關、又另外開一特別號、中五碼及特別號為貳獎;中五碼為參獎,中四碼為肆獎,中三碼為普獎、每期提撥之總獎金,為當期銷售總金額的56%(一張樂透彩券賣50元)、普獎獎金每張200元,在普獎的獎金分配完後,將剩餘的獎金以38%, 12%, 15%, 35% 分到頭獎, 貳獎, 參獎, 肆獎、頭獎至肆獎,若有數人同中某獎項,則均分該獎之獎金、

(i) 各獎之中獎機率如下:

$$\text{頭獎: } \frac{1}{\binom{42}{6}} = \frac{1}{5,245,786} \doteq 0.00000019,$$

$$\text{貳獎: } \frac{\binom{6}{5}}{\binom{42}{6}} = \frac{6}{5,245,786} \doteq 0.000001143,$$

$$\text{參獎: } \frac{\binom{6}{5} \binom{35}{1}}{\binom{42}{6}} = \frac{210}{5,245,786} \doteq 0.000040032,$$

$$\text{肆獎: } \frac{\binom{6}{4} \binom{36}{2}}{\binom{42}{6}} = \frac{9,450}{5,245,786} \doteq 0.001801445,$$

$$\text{普獎: } \frac{\binom{6}{3} \binom{36}{3}}{\binom{42}{6}} = \frac{142,800}{5,245,786} \doteq 0.02722185、$$

(ii) 其他一些相關機率如下:

$$\text{恰中兩個號碼: } \frac{\binom{6}{2} \binom{36}{4}}{\binom{42}{6}} = \frac{883,575}{5,245,786} \doteq 0.168435197,$$

$$\text{恰中一個號碼: } \frac{\binom{6}{1} \binom{36}{5}}{\binom{42}{6}} = \frac{2,261,952}{5,245,786} \doteq 0.431194105,$$

$$\text{六個號碼都不中: } \frac{\binom{36}{6}}{\binom{42}{6}} = \frac{1,947,792}{5,245,786} \doteq 0.371306035,$$

$$\text{中大樂透之頭獎(49選6): } \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13,983,816} \doteq 0.000000071,$$

$$\text{中小樂透之頭獎(31選5): } \frac{1}{\binom{31}{5}} = \frac{1}{169,911} \doteq 0.000005885、$$

(iii) 設某期共賣出樂透彩 $a$ 張,則當期各獎總獎金的期望值如下:

$$\text{頭獎總獎金: } 0.38a \left( 28 - \frac{28,560,000}{5,245,786} \right) \doteq 8.571139395a,$$

$$\text{貳獎總獎金: } 0.12a \left( 28 - \frac{28,560,000}{5,245,786} \right) \doteq 2.706675598a,$$

$$\text{參獎總獎金: } 0.15a \left( 28 - \frac{28,560,000}{5,245,786} \right) \doteq 3.383344498a,$$

$$\text{肆獎總獎金: } 0.35a \left( 28 - \frac{28,560,000}{5,245,786} \right) \doteq 7.894470495a,$$

普獎總獎金： $200 \cdot \frac{142,800}{5,245,786} a = 5.444370014a$ 、

(iv) 設某期樂透彩銷售總金額為 $b$ 元，則當期各獎總獎金的(近似)期望值如下：

頭獎總金額： $0.171422787b$ 、

貳獎總金額： $0.054133511b$ 、

參獎總金額： $0.067666889b$ 、

肆獎總金額： $0.157889409b$ 、

普獎總金額： $0.1088874b$ 、

(v) 第一期樂透彩銷售總金額為776,273,750元，即共賣出15,525,475張，依上述公式，估計出各獎之獲獎張數及總獎金如下、

頭獎2.95張，總獎金133,071,010元、

貳獎17.75張，總獎金42,022,424元、

參獎621.51張，總獎金52,528,030元、

肆獎27,968.30張，總獎金122,565,404元、

普獎422,632.15張，總獎金84,526,430元、

實際開出各獎之獲獎張數及總獎金如下：

頭獎0張，總獎金136,345,482元、

貳獎6張，總獎金43,056,468元、

參獎338張，總獎金53,820,585元、

肆獎20,014張，總獎金125,581,365元、

普獎379,547張，總獎金75,909,400元、

提撥之總獎金：434,713,300元、

註(i) 普獎獎金總額以總獎金之50%為上限，以保障大獎中獎人之獎金不至於太低、不過這是很難發生的，因為普獎總獎金的期望值，佔提撥總獎金之比率約為

$$\frac{0.1088874b}{0.56b} \doteq 19.44417\%$$

遠小於50%、

(ii) 若某期某一獎項無人獲得，則該獎之獎金移至下期同一獎項，最多累積5期、若連續5期無人獲獎時，則累積之獎金併入次期之總獎金中，再加上普獎總獎金並未固定，因此實際上每期頭獎至肆獎之總獎金是有波動的，並不固定佔該期銷售總金額之若干比率、

(iii) 由於並不計開出的6個號碼之順序，故可開出號碼的組合共有

$$\binom{42}{6} = 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 / 6! = 5,245,786(\text{組})、$$

如果是一排6個空格，每空格要自1至42中，任選一號碼來填寫，順序對才算中獎，則總共的可能性，便有 $42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37$ 組、

(iv) 頭獎中獎機率為 $\binom{42}{6}^{-1}$ ，而非 $\binom{42}{6}^{-1} \cdot \binom{42}{6}^{-1}$ 、後者是開出一組特定的號碼，如{1, 2, 3, 4, 5, 6}，而你也剛好選此組號碼之機率、{1, 2, 3, 4, 5, 6}至{37, 38, 39, 40, 41, 42}，總共有 $\binom{42}{6}$ 組，若你剛好選中開出的那組便中獎，並不限選中{1, 2, 3, 4, 5, 6}才中獎，因此中頭獎之機率仍為 $\binom{42}{6} \cdot \binom{42}{6}^{-1} \cdot \binom{42}{6}^{-1} = \binom{42}{6}^{-1}$ 、

(v) 貳獎為中五個號碼(有 $\binom{6}{5}$ 組)，且另一碼沒有選擇只能與特別碼一樣，因此最多可以有 $\binom{6}{5}$ 組、

(vi) 參獎為中五個號碼(有 $\binom{6}{5}$ 組)，且另一碼不能與特別號一樣(否則就是貳獎了)，可自剩餘的 $42 - 6 - 1 = 35$ 碼中任選一碼，因此最多可以有 $\binom{6}{5} \binom{35}{1}$ 組、

(vii) 肆獎為中四個號碼(有 $\binom{6}{4}$ 組)，另二碼可自剩餘的 $42 - 6 = 36$ 碼(包含特別號)中任選二碼，因此最多可以有 $\binom{6}{4} \binom{36}{2}$ 組、同理可得普獎最多可以有 $\binom{6}{3} \binom{36}{3}$ 組、當然實際上不見得每組號碼都有人投注，就像頭獎也不見得有人獲得、

(viii) 普獎之中獎機率為 $\binom{6}{3} \binom{36}{3} / \binom{42}{6}$ ，而非 $1 / \binom{42}{3} = 1 / 11,480 \doteq 0.0000871$ 、後者是自42個號碼中任挑3個之中獎機率、普獎之中獎機率比此機率大多了、

(ix) 六個號碼都不中，比恰中一個號碼還難、