挑戰機率

黃文璋
國立高雄大學應用數學系

民國九十一年一月起台北銀行發行公益彩券, 盛行了幾期, 要求降溫的聲音便不絕於耳。我們來看美國的情況。在2000會計年度, 全美樂透彩券銷售金額達到383億美元, 以二億四千萬人計, 平均每人約買160美元, 即約5,600台幣。單州銷售量最大的是麻薩諸賽州, 該州有635萬人, 但共賣出約37億美元。而個人買最多的爲羅德島州, 平均每人約買823美元, 即約28,800台幣。台灣如果全年銷售1,000億元台幣, 平均每人約買4,300元, 尚較全美平均還低, 更遠低於羅德島州。要知美國並非每一州均允許賣彩券, 包含猶他州在內, 有13州是不賣彩券的。

所以若與美國已經是穩定狀態的情況相比, 台灣一開始的狂熱, 即使不能說是小巫見大巫, 也不須過度擔心。倒是因此引起普遍社會對機率統計的重視, 進而較能以隨機的方式來思考問題, 也是一個收穫。

一般樂透彩是從1至n的號碼中, 任意挑選r個不同的號碼下注。我們稱此爲n取r。台北銀行目前的版本爲42取6, 與愛爾蘭及美國的一些州一樣。美國各州從39取6到54取6都有。世界各地樂透彩中獎的方式大同小異, 均與台北銀行現行方式類似。每一期由具公信力的發行單位, 隨機地產生r個號碼, 就是頭獎號碼。頭獎中獎機率很低, 以紐約州的54取6爲例, 只有25,827,165分之一, 約爲42取6的頭獎中獎機率的五分之一。台北銀行是以每一期總銷售金額的56%當作總獎金, 頭獎獎金約佔總銷售金額

的17%, 但因有普獎的關係, 此比率每期會有些波動。一張彩券50元, 其中便約有8.5元充做頭獎獎金。頭獎至肆獎若有數人同中, 則均分該項獎金。

樂透彩對玩家而言, 是一個不公正的賽局, 平均每100元只能拿回56元。那爲什麼還有這麼多人願意玩呢? 主要的原因應是大獎的鉅額獎金吸引人。以"一券在手希望無窮"來形容尚不足, 至少要加上"可以改變你的人生"。想想上億元的獎金是多少人一輩子不吃不喝也存不到的錢。再加上在樂透彩的賽局裡, 投資可以很小, 而且又眾生平等, 每個人只要有50元便可進場。不論才智貧富, 不需努力, 每個人都可有相同的機會一夕致富。因此雖然數學的理論告訴我們, 若找到一種每年投資報酬率爲15%的投資方式, 每月固定投資1萬5千元, 則以複利計, 30年後本利和將超過1億元。但不少人還是寧願經由那6個號碼, 來獲取1億元。要知15%的報酬率並非閉著眼睛便找得到, 而30年也實在太長了, 超過一般人願意的等待。在眞愛一世情那部電影裡, 茱莉亞歐蒙在布萊德彼特離家前對他說"不管多久, 我會永遠等你。"幾年後彼特回來了, 已嫁給彼特大哥的歐蒙, 對前來看他的彼特, 幽幽地說"永遠, 實在是太久了。"做莊的政府面對那些心甘情願的繳稅者, 不禁樂在其中。英國學者伊文(C. H. L'E Ewen)曾說

國家徵收樂透稅,	Lotto's a taxation,
愚人乖乖捧錢來,	On all fools in the nation,
感謝讚美老天爺,	But heaven be praised,
輕輕鬆鬆錢落袋。	It's so easily raised。

前面提過每期頭獎號碼是以隨機的方式產生。所謂隨機, 乃表一組6個號碼, 皆有相同的可能性出現。對於台北銀行的樂透彩, 42取6共有5,245,786組不同的號碼, 每一組應皆有5,245,786分之一的機率出現。而且不同期之頭獎號碼應相互獨立, 也就是互不影響。這是樂透彩與股市、賽馬等賭局不同處。一旦期數夠多後, 發行的單位應做統計分析, 以檢定歷來開出的頭獎號碼, 是否以隨機的方式出現。光是檢查球的重量是

不夠的。

如果號碼眞的是隨機產生, 那爲什麼還有人追求明牌呢? 坊間充斥著各種神樹牌、問神牌、解夢牌等, 往往以心誠則靈做號召。但究竟有沒有效呢? 連號的經常出現, 頭獎號碼裡有重覆出現, 有些號碼卻又一直未出現, 這些均使人懷疑頭獎號碼的出現並非隨機, 熱門及冷門號碼似乎是存在的。

上述這些問題, 一方面可經由實際去計算機率而解惑。例如, 每期頭獎6個號碼裡, 會有連號之機率約爲0.56, 有超過一半的機會。至於連續兩期, 頭獎號碼有重覆的機率約爲0.63, 而至少有兩碼重覆之機率約爲0.20。這些事件的機率均比我們想像中的大很多, 所以發生是不足爲奇的。何況大大小小有趣的事件其實很多, 如6碼全爲偶數, 或6碼全在1至21等, 即使每件事發生的機率不大, 但因多少眼睛盯著那6碼, 使得每一期總會讓人從6個中獎號碼中找到一些不尋常。另一方面我們要了解隨機的本質。將10個球隨機地丟進10個箱子中, 你會不會以爲每個箱子中各有一個球是最容易發生呢? 非也! 1個空箱、2個空箱, 一直到7個空箱都比每箱中各有一球容易發生。以5個空箱來說, 這個事件發生的機率, 約爲每箱中各有一球之機率的354倍。雖然是隨機地丟球, 但結果是看起來不隨機的事件反較容易發生。這點違反一般人的直觀, 其實仔細想想, 每箱中要剛好各丟進一球才是高難度呢。大家應有底下的經驗：有時一天接到好幾通電話, 有時連續幾天沒有一通電話, 較少是每天接到一樣多的電話。這也是一樣的道理。

如果是每一組號碼中獎機率皆相同, 那是否每次就隨便選6個號碼呢? 樂透彩除了普獎(中三碼)是每人得200元, 中四碼以上, 皆是由中的人(或說中的號碼之擁有者)均分該獎之獎金。所以對同一獎項, 中的人愈少, 能分得的獎金便愈多。因此有底下兩個卑之無甚高論的規則。

1. 若簽兩注以上, 不要有兩張超過三碼重覆。爲什麼呢? 我們以一極端的情況來說明。假設簽兩張號碼皆相同的注, 則中頭獎的機率爲5,245,786分之一, 一旦中了, 如果只有你一人中, 你獨得該將金, 一人擁有兩張彩券並沒有幫助。若有另一人亦中, 則你得三分之二的頭獎獎金, 餘此類推。但

若簽兩張不一樣的號碼, 則中頭獎的機率爲5,245,786分之一的兩倍, 很容易看出此時中頭獎的獎金之期望值較大。前述較佳策略就是指所得之期望值較大的意思。要先提高中獎機率才有獎金可言。報載有人以包牌的方式花了一萬餘元, 簽了210注, 共中獎金1億餘元。如果你"確定"頭獎號碼就在某10個號碼中, 則就用10個號碼去組合當然是好策略。但誰能事先打包票知道那10個號碼會涵蓋頭獎號碼呢? 報紙只刊載包牌中大獎者, 卻不登更多包牌而痛哭者。

2. 要儘量簽冷僻的號碼。德國樂透彩是49取6。漢茲(見Henze(1997)一文)曾對德國1993年10月16日那一期銷售的6,803,090張彩券做分析。並列出最暢銷的二十組號碼。排名第一的是7, 13, 19, 25, 31, 37, 共賣出4,004張, 排名第二的是7, 14, 21, 28, 35, 42, 共賣出3,817張(這一組亦常是英國及美國加州最暢銷的號碼, 加州在1988年此組號碼全年共賣出16,771張。二地樂透彩皆是49取6)。一直到排名20都還賣出1,317張。第一組是將7依序加6, 第二組是將7依序加7。這是很多人的習慣, 他們以爲這樣子將數字分開最好, 殊不知人同此心。你看出問題所在了吧! 簽這種號碼, 如果幸運地中頭獎, 總獎金以1億元計, 每人只能分到兩萬多元。中獎者可能會從喜極而泣轉爲悲從中來。曾有人研究購買樂透彩券者有三種型態：第一種是簽注很明顯就是暢銷的號碼, 如上一期頭獎號碼, 或1, 2, 3, 4, 5, 6等。這種當然不是明智的選擇。另一種屬於較迷信者, 專簽諸如生日的排列組合。此情況可能會造成數字都偏小, 因此可能會有很多人與你簽的號碼相同(月份只有1至12, 日期只有1至31)。第三型就是較聰明的一類, 會儘量選非暢銷的號碼, 以免太多人來均分獎金。奉勸彩迷們, 對於各個神桌或土地公所提供的明牌, 務必敬而遠之。

樂透彩雖能帶給人很大的刺激, 但只能淺嚐即止, 付出愈多失望愈大。每期買幾張好玩就可以了。有人很豪放地拿出10萬元投入, 再將中的獎金繼續投入。你知道1個月也就是8期之後, 會成爲多少嗎？由於期望值是0.56倍, 花一百元平均只能拿回56元, 所以一期後, 約成爲$100,000\times 0.56$元, 即56,000元, 兩期後約成爲$56,000\times 0.56$元, 即31,360元。依此類推, 8期後約成爲$100,000\times (0.56)^8$元, 即約967元。10萬元1個月

後僅餘967元, 若投資100萬元則1個月後餘9,670元。玩樂透彩就如紅樓夢四十七回裡鳳姐所說"這一吊錢, 頑不了半個時辰, 那裡頭的錢就招手叫他了。"不要只看到有人僅簽一注或兩注便中了上億, 或上千萬元的獎金。這表示更多人是連五成六的本金都拿不回。這就是機率, 有東家長便有西家短。你可以拼經濟, 可以拼政治, 打口水戰也可以, 但千萬不要想挑戰機率。十年才能贏得青樓薄倖名。在樂透世界裡, 想跟機率拼的人, 只要1個月便可贏得公益名。一些與彩券有關的機率, 可在"機率統計網路學習館"找到, 網址是http://probstat.nuk.edu.tw/, 這是設在國立高雄大學應用數學系的網站。

進一步閱讀資料

1. 吳程遠譯(1999). 這個不科學的年代(Feynman, R. P. 原著：*The Meaning of It All : Thoughts of a Citizen-Scientist*)。天下遠見出版股份有限公司, 台北。

2. 葉偉文譯(2001). 統計, 改變了世界(Salsburg, D. 原著：*The Lady Tasting Tea*)。天下遠見出版股份有限公司, 台北。

3. 盛逢時譯(2001). 數字的陷阱(Bruce, C. 原著：*Conned Again, Watson! Cautionary Tales of Logic, Math, and Probability*)。時報文化出版企業股份有限公司, 台北。

4. 王業鈞譯(2001). 你賭對了嗎？(Bennett, D. J. 原著：*Randomness*)。新新聞文化事業股份有限公司, 台北。

5. Henze, N. (1997). A statistical and probabilistic analysis of popular lottery tickets. *Statistica Neerlandica*, Vol. 51, No. 2, pp. 155-163.