

數學與思考

黃文璋

國立高雄大學應用數學系

1 學數學的目的

一門能幾千年來吸引不少聰明的人投入的學科，一定有些道理在。有趣及有用應是最大的動機。自兩千多年前起，對各種幾何圖形及整數性質的研究，多半是以有趣為出發點。另外，古埃及時代，尼羅河氾濫後，土地的重新丈量，對幾何學的發展當然有幫助；而為了解決某些未知數的問題，促進了解方程式的發展。

但是數學長期被列為中小學之一必修科目，在大學裡不少科系亦要修習一些數學科目(如微積分、線性代數及機率統計等)，我國古代六藝(禮樂射御書數)中，也包含數學。有趣與有用可能皆非主要原因。君不見不少莘莘學子長期為數學所苦，他們怎會覺得數學有趣？而不少父母在開導小孩數學的重要時，猛然發現，自離開校門後，仍用到的數學，似乎只有小學時代的加減乘除。在責怪小孩數學考得不好時，也承認考卷上似曾相識的題目，卻不像有那一題還記得怎麼做的。

顯然數學的有趣及有用，是專業人士接近數學的動機，而不是數學被設定為各級學校裡一重要學科的主因。

思考！人人皆須學數學的目的，是因數學對我們思考能力的增進很有幫助。大部分我們所學的數學，後來是忘記了，此正如我們每日入口的食物，絕大部分的結局是排泄掉，但有些食物的確是被我們吸收了，成為人體的一部份。可能成為肉，可能成為血，可能成為毛髮，反正不是本來的樣子。牛吃草，可產生牛奶。因此學數學產生的效益不一定是會數學，其實也不足為奇。

若能將數學中的各種理論及方法，融入我們的思維，則雖然我們所學的數學，最後大部分都忘記了，但我們會有些數學概念，能以數學的眼光看世界。就好像念國文，並非只是為了識字與寫信，而是讓我們更易融合不同的思想。一個人如果把國文念通，他的邏輯概念必很清晰，所以古時候的人只念文史，卻能帶兵打仗，出將入相。把經史子集念通，胸中自然有數萬甲兵了(宋朝范仲淹以龍圖閣直學士，經略陝西，夏人不敢犯其境，說“小范老子，胸中自有數萬甲兵”)。

你可能會說誰不會思考呢？的確沒錯，同樣是被蘋果打中頭，有些人想到蘋果大約熟了，有些人想到大概是風大了。從數學裡，我們可以學到邏輯思考、抽象思考、隨機思考、及創意思考等思考能力。這是四種極重要的思考能力。也許藉由別的方式，就如之前所說由國文裡也可以學習到邏輯。通常一文章寫得很好的人，邏輯也是不錯的。但無疑地，經由數學是一種極有效的得到這四種思考能力的途徑。而獲取這四種思考能力，也是大部分日後不會靠數學謀生的人，學數學的主要目的。

2 邏輯思考

先看網路小說“第一次親密接觸”中的數段句子。

- (i) 如果我還有一天壽命,那天我要做你女友。我還有一天的命嗎?沒有。所以,很可惜,我今生仍然不是你的女友。
- (ii) 如果把整個浴缸的水倒出,也澆不熄我對你愛情的火焰。整個浴缸的水全部倒得出嗎?可以。所以,是的,我愛你。
- (iii) 如果我有翅膀,我要從天空飛下來看你,我有翅膀嗎?沒有。所以,很遺憾,我從此無法再看到你。
- (iv) 如果把整個太平洋的水倒出,也澆不熄我對你愛情的火焰。整個太平洋的水全部倒得出嗎?不行。所以,我並不愛你。

這部小說雖然頗引起注目,可惜以上四個句子,邏輯上都是錯的,儘管作者是一位國立大學工學院博士班的學生。

現在的大學生及研究生,至少都唸了十二年的國文,也經歷過不少考試。但他們有時連一個短短的活動通知(如打球、聚餐)也都寫得彳亍扭扭的。這種通知不是很簡單嗎?只需寫明時間、地點、目的、參加方式及歡迎參加而已。一個通知都寫不好,更不要說寫讀書報告或論文了。表達能力是很重要的。一個人儘管滿腹經綸,或心有千言萬語,別人總要經由他寫出來的或講出來的去了解。表達能力不佳,不外是人文素養或專業素養不夠。學生讀書的主要目的常是考試,而在短短的考試時間以及閱卷速度的限制之下,能考的題目形式是很侷限的。再加上多年累積的考古題,對學生應付考試提供莫大的便利。因此一路過關斬將下來,一旦評量的方式不是他所熟悉的,如無考古題,或要做個口頭或書面的報告,他便驚慌失措了。

其實不論人文素養或專業素養,一份報告要使人易於接受,是要靠有條有理的表達,及理性的說服,而這都有賴邏輯訓練。這僅是報告的表面呈現方式。一個研究工作者,在探討一套理論之前,總要先猜想這套理論是否正確?即是否合乎邏輯?而研究步驟的規畫,也都要依循一套邏輯程序。這就是為何我們要強調邏輯思考了。對想法覺得愈來愈合於邏輯,便產生信心,才著手將想法付諸行動。這便是由思想產生信仰,由信仰產生力量。

有些學者可能對他本行的學術論文寫得有條有理,但對非他專業的方面便常寫或說得雜亂無章。這種現象本質上還是邏輯訓練不足,沒有真正了解邏輯的內涵,與學生國文成績很高,但連個通知都寫不好是類似的。所以我們要的邏輯是“通識邏輯”,也就是整個思考方式都是邏輯的,而非只能寫高度合乎邏輯的自己本行之學術論文。

一般人皆希望自己有邏輯,且在爭論時往往以沒有邏輯批評對方,底下是幾則取自報紙上的新聞,各位也不妨判斷一下其中的“邏輯”之用法是否正確。

新聞1.

標題:扁鑽VS. 鋼砲 八年前精彩戲碼

內容:王建瑄七十九年初任財政部長時,即與陳水扁吵了一架。當時王建瑄辭去經濟部次長一職,不久即被拔擢為財政部長,陳水扁即在立法院指責王建瑄辭官後馬上升官,是「占了別人的官位」,應該辭職;王建瑄馬上還以顏色指出,按照這種“邏輯”,陳水扁也占了別人當選的席次,陳水扁才應該辭職。(87年11月12日聯合報第3版,記者羅曉荷)

新聞2.

標題: 宋楚瑜: 有人不斷放話說這說那

內容: 宋省長表示, 立委選戰, 國民黨在國會要過半, 必須靠在台灣省參選的同志, 因為黨在台北市、高雄市提名人全部當選, 也無法過半, 所以台灣省提名的立委參選人, 不但要過半, 還要彌補北高二市的不足。

他強調, 這是很簡單的“數學邏輯”, 省府幫助改換跑道參選立委的省議員, 完全是正確的做法, 沒什麼不對, 也是天經地義的事情, 沒有想到田單黨部的做好卻遭到批評, 甚至中央有人還大放厥詞的說, 選後讓他們自生自滅, 實在令人感到痛心。(87年11月12日中國時報第3版, 記者劉瑞祺、楊震海)

新聞3.

標題: 監院動作成政治角力及選舉舞台

內容: 邱義仁進一步說, 更荒唐的是, 彈劾文、糾正文的內容都沒有什麼證據。他指出, 監察院是準司法機構, 辦事一定要講證據, 不可以只是主觀認定有嫌疑就認定有罪, 而且「相關不一定是必然」。他痛陳監察院「沒有“邏輯”, 搞不清楚自己的職權」。(87年11月13日聯合報第3版, 記者林美玲)

經由數學中的推理證明的訓練, 培養出適當的邏輯思考能力, 是學數學的首要目的。否則在論理辯證時, 即使義正辭嚴, 也不易說服人的。我們再舉一則新聞。

新聞4.

錢復昨天召開記者會表示, 中華民國憲法前言明白表示, 中華民國憲政體制是秉持國父孫中山先生的五權憲法, 「我對憲法是百分之百的尊重」, 因此外界要求廢除監察院的聲音, 他是無法接受的。(87年12月4日中國時報第2版, 記者劉添財)

這是擔任國民大會議長近三年的錢復, 在內定轉任監察院長後的談話。我們並非要討論監察院之存廢問題, 但打開早自民國三十五年便由國民大會制定的憲法, 前言中清清楚楚地寫著“依據孫中山先生創立中華民國之遺教”, 何嘗“明白表示”錢復所說的, 連五權憲法四個字也沒出現。另外, 憲法原始設計的監察院, 監察委員是由省市議會等間接選舉產生, 而監察院長、副院長是由監察委員互選之。歷經四次修憲, 監察委員和監察院長、副院長的產生方式, 改為由總統提名, 經國民大會同意後任命。國民大會議長宣稱對憲法百分之百的尊重, 已經有點奇怪, 更何況百分之百的尊重憲法, 為何便無法接受廢除監察院的聲音? 這是什麼邏輯? 難道錢復忘了憲法是可以修改的嗎?

3 抽象思考

西元1727年, 歐拉(Euler, 1707-1783, 瑞士人, 有史以來著作最多的數學家)接受了俄國聖彼得堡科學院(St. Petersburg Academy)的工作。在當時的普魯士(Prussia)東邊, 瀕臨波羅的海(Baltic Sea), 有一座古老而美麗的城, 叫做哥尼斯堡(Königsberg)。昔日此為一重要的工業城, 為東普魯士的首府, 並有一歷史悠久的大學。著名的數學家希伯特(Hilbert, 1862-1945)就

誕生於哥尼斯堡附近。第二次世界大戰後此城改名為Kaliningrad, 屬於俄國。但真正使此城出名的, 倒都不是這些。哥尼斯堡被普列格(Pregel) 河貫穿全城。此河並有二條支流, 一名新河, 一名舊河, 並在城中匯成一條大河, 流入大海。普列格河將全城分成四部分, 於是人們建造了七座橋, 以把哥尼斯堡連成一體, 見圖1。

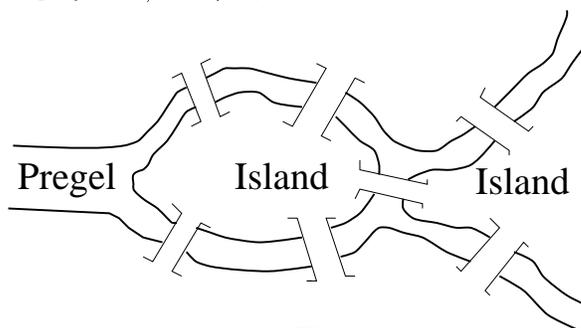


圖1.

每天城裡居民來往七座橋, 熙熙攘攘, 望著淙淙流水, 逐漸就傳出了一個有趣的問題: 是否能夠一次走遍所有七座橋, 而且每座橋只能走過一次?

這個問題似乎不難, 誰都樂意去試一下, 只是日子一天天過去, 也沒有人做得到。隨著此問題的傳播, 哥尼斯堡也因此出名。

歐拉抵達聖彼得堡後不久, 便聽到了上述故事。他並不曾到過哥尼斯堡, 但在聽到這個問題後只花了幾天的時間, 便解決了此七橋問題(Problem of the seven bridges)。他首先將七橋問題化爲一數學模型。他看出兩岸陸地及河中的島, 都不過是橋的連接點, 其大小及形狀與問題無關, 因此可將它們視爲4個點。至於七座橋是七條必經過的路線, 它們的長短或曲直, 也與問題本身無關, 因此可以任意7條曲線來表示。也就是他先想到圖2, 然後得到圖3。

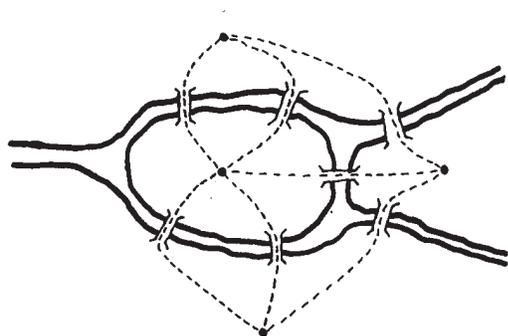


圖2.

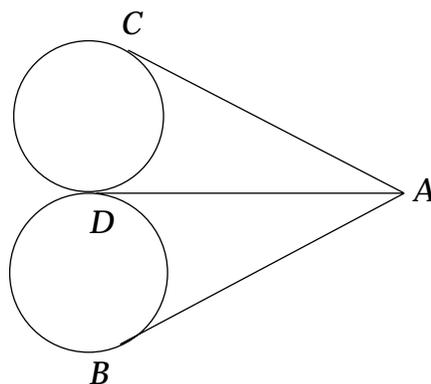


圖3.

如此, 歐拉將七橋問題抽象化成一一個一筆畫的問題。七橋問題便換成了對於圖3中之圖形的一筆畫的問題。接著歐拉發現凡是能用一筆畫畫出的圖形, 除了起點與終點, 每當你用筆畫一條線(可以是曲線), 進入其中的一個點時, 你還必須畫一條線離開此點, 否則圖形不能以一筆畫出。也就是說除了起點與終點, 圖中每一個點都應與偶數條線相連(這種點稱爲偶點, 不是偶點便稱爲奇點)。而如果起點與終點重合, 則此重合點也應與偶數條線相連(故此點亦爲偶點); 若

起點與終點不重合,則此兩點皆與奇數條線相連(故皆為奇點)。因此可以一筆畫的圖形,其奇點數必為0或2。

現在圖3中,共有 A, B, C, D 4個點。其中 A, B, C 分別與3條線相連, D 與5條線相連。由於4點均為奇點,因此一筆畫出此圖形是不可能的。也就是想不重複地通過哥尼斯堡的七座橋是不可能的。諸位看,歐拉不用去走橋,以數學推理便解決此問題。相傳歐拉在解決了七橋問題之後,還編了一個十五橋問題,見圖4,讀者不妨試試。



圖4.

我們看到歐拉將一實際的問題抽象化,雖然看不到河也看不到橋了,但結果是不但解決了原來的問題,連更一般的問題也可解決了,甚至還開創了一數學的新領域。

七橋問題本來是一幾何學的問題,但卻異於傳統的幾何學中所探討的問題。在幾何學中,我們討論各種圖形,只是它們的大小及形狀都是不變的。如今在歐拉的解法裡,他把陸地變成了點,橋樑變成了曲線,而且曲線的長短及行走方式都不重要了。舉例而言,圖3中的圖形,即使改為圖5中之任一圖形,都會導至相同的結論。

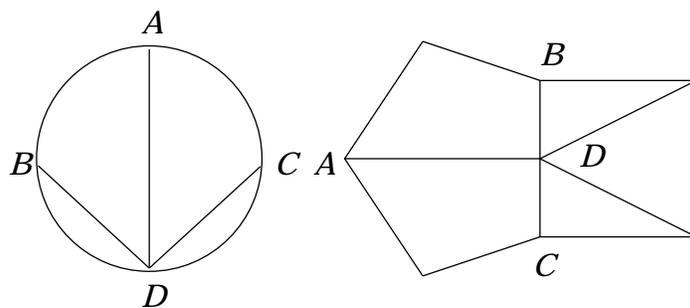


圖5.

明顯地,圖中什麼都可改變,唯獨點線間之相關位置,以及相互間之連接方式不能變。歐拉認為對這類問題的探討,為幾何學之一新的分支,稱為位相解析學(analysis situs)。後來此新領域被正式命名為拓樸學(topology)。時至今日拓樸學已成為數學中之一主要的領域。

另一方面這種對圖形的討論,也形成數學中一應用廣泛且極有趣的分支,即圖論(graph theory)。在計算機科學、物理、化學及生物等領域中,都可找到圖論的蹤跡。圖論與數學中的群論、數值分析、矩陣理論、拓樸學及組合數學等關係亦很密切。而歐拉解決七橋問題的論文,也成為圖論中第一篇論文。

要知在數學中是不需眼見為實的。

在中學時大家學到實數，後來我們給定實數中的基本特徵，也就是我們列出一些公理：交換律、結合律、分配律、單位元素，……等，然後那些滿足這些公理的，便是實數。至於這時實數是否是用來計數，或是它們的幾何意義為何，甚至連它們究竟是什麼，我們就不太在乎了、數學上常有這種做法，一個實際上產生的概念，一但發展的夠完全了，我們便會將其抽象化。

古希臘時代，便知任一三角形的三條中線交於同一點，此點稱為重心。重心距任一頂點的距離為對應中線長的三分之二。至於重心、外心(三條中垂線的交點)與垂心(三條高的交點)，三點共線。想想那是沒有紙筆的時代，要找個真正的平面也未見容易，而圓規也不會太精巧。如果要你以作圖來檢驗，你必會將鉛筆削得尖尖的，畫圖後，還不見得能確定是否交於同一點，或是共線，所以與其說古希臘的數學家，繪圖能力很好，或是說觀察力極佳，還不如說他們抽象思考的能力很好。他們看出問題的本質，而不以實際的經驗，做為唯一的判斷標準。他們自有一套思想體系，在那套體系裡，有其公認的如何判定一事為真的方式。

有抽象思考的能力，就易看出問題的本質。一個人可以在很多不同的職務上勝任愉快，就是他瞭解這些工作本質上的共通性，見山是山，見水是水。有人說“牛牽到北京還是牛”，說穿了也是強調能看出事物本質的能力。我們再給一例子。

西元1985年11月14日，英國及美國的報紙及雜誌爭相報導研究莎士比亞(Shakespeare, 1564-1616, 英國劇作家及詩人)的美國學者Gary Taylor, 在英國牛津大學的Bodleian圖書館(是英國歷史最悠久、最重要，且藏書只供參考概不外借的圖書館之一，現有館藏420餘萬冊印刷本及5萬餘冊手稿本)的一本自西元1755年起收藏的書中，找到一首很可能是莎士比亞的抒情詩。該詩的第二抄本，稍後在美國耶魯大學的圖書館出現。我們姑且先稱這首詩為泰勒詩(Taylor poem)。如果能證實泰勒詩確為莎士比亞所作，則這將是十七世紀以來，莎士比亞作品最重要的一次發現。英美學者為了這首詩之真偽爭論不休，大打筆戰。只是不少專家認為這首泰勒詩不論在用字遣詞與韻味風格上，都迥異於莎士比亞其他的作品。有趣的是，統計學者也介入這場紛爭。西元1986年1月24日出版的Science雜誌，刊登了一篇“莎士比亞的新詩—向統計學禮讚”(Shakespeare's new poem: an ode to statistics)，介紹著名的統計學者，美國史丹福大學的Efron教授及芝加哥大學的Thisted教授，如何以統計的方法鑑定這首新出土的泰勒詩，是否為莎士比亞所作。

Efron與Thisted所採用的方法可追溯至西元1940年代。那時生物學家Williams向英國統計學家費雪(R. A. Fisher, 1890-1962, 現代統計學的奠基者)，提出一個似乎不可能回答的問題。Williams曾前往馬來西亞採集蝴蝶，他把自己共見過幾種(species)蝴蝶，以及每種各見過的次數(有些見過幾十次，有些見過幾次，有些只見過一次)，都告訴費雪。Williams想知道在馬來西亞的蝴蝶中，他沒見過的究竟有多少？

一般人會覺得此問題毫無頭緒，不可能解答的。但統計學家卻有辦法估計尚有幾種蝴蝶還未被捕捉到。只要假設蝴蝶是依照每一種之隻數的比例，隨機地(randomly)被捕捉。而這只要假設每一件事(包括蝴蝶的分佈，捕捉的技術等)隨時都很均勻，不會先是把某一種蝴蝶捕捉殆盡，之後再大量捕捉另一種。若有某一種蝴蝶尚未被捕捉到，那純粹只是運氣的關係，而非該種蝴蝶特別會躲藏。

Efron與Thisted介入文學是很偶然的。有一次他們聆聽加州大學 Santa Barbara 分校

的Gani教授(1924-)之演講。Gani的目的是要分析莎士比亞作品的結構。在演講中他提到德國已有人將莎士比亞的所有作品輸入計算機中,並計算出莎士比亞所用過的全部字數,及每一個字使用過的次數。聽完演講後,Efron與Thisted決定把費雪所用的方法拿來分析莎士比亞的作品。他們想回答若發現了一新的作品,如何經由統計分析其中所用的字,以決定此作品是否為莎士比亞所作?Efron and Thisted (1976)一文就是他們的研究報告,發表在統計學中極權威的學術期刊Biometrika。

這一篇文章的題目為: Estimating the number of unseen species: How many words did Shakespeare know? 如前所述,在生態學中往往會估計某生物尚未見到的種數。而在該文中,尚未見到的“種”,卻是莎士比亞知道但不曾用過的字。抽象思考的能力就在這裡表現出來。

莎士比亞總作品共有884,647個字,其中有31,534個相異字。而有14,376個相異字只出現一次,有4,343個相異字只出現兩次。

Efron與Thisted估計莎士比亞尚認識11,460個字,且標準差小於150。

事實上在Efron and Thisted (1976)一文中,他們想回答更一般的問題。他們寫著“假設有另一很大的莎士比亞的作品被發現,譬如說共有884,647個字,則除了那31,534個相異字外,預期可找到幾個新字?”莎士比亞共認識幾個字就對應 $t = \infty$ 的情況。由於自十七世紀之後,便沒有莎士比亞的新作品出現,所以Efron與Thisted從未想過會有機會真正的以莎士比亞的作品來檢驗他們的理論。他們做此研究的動機純粹是覺得有趣。據Efron說“*It never possibly occurred to me that we'd have a chance to use it*”。甚至當他從新聞上獲知這首泰勒詩出現,且有可能是莎士比亞所作,他一時並沒想到他其實曾與Thisted做過這方面的研究。直到Thisted提醒他,他才想到10年前所做的工作。塵封已久的莎士比亞又浮現在眼前。

這首泰勒詩與總作品相比,相當短,共只有429個字(其中包含258個相異字)。Efron與Thisted基於罕用字(unusual words)出現的頻率(frequency of occurrence),發展出一在統計上算是簡單的檢定法。有一些字是大家常用的,如“a, is, the”,在每一篇文章中可能都出現不少次。但對罕用字,每個作者使用的習慣可能便不同了。Efron與Thisted指出,在總作品中,罕用字的使用非常普遍,在全部使用的31,534個相異字中,有接近2/3的比例(共21,011個),只用了不超過3次。

Efron與Thisted將他們的結果整理為Thisted and Efron (1987)一文,題目就叫“*Did Shakespeare write a newly-discovered poem?*”

若此泰勒詩確為莎士比亞所作,則Efron與Thisted估計其中含有6.97個在總作品中未曾出現的相異字。若再考量標準差,則此首新詩約包含 6.97 ± 2.64 個新字,即新字的數目約介於4.33至9.61間。實際的新字有9個,的確在4.33與9.61間。估計曾出現一次的字有 4.21 ± 2.05 個,實際則為7,估計曾出現兩次的字有 3.33 ± 1.83 個,實際則為5。Efron與Thisted一直分析到曾出現100次的字,其吻合程度皆相當驚人,可以說通過嚴格的統計檢定。看起來這首詩確是莎士比亞所寫,或者用比較保守的統計術語來說:沒有有足夠的證據可推翻此詩為莎士比亞所做之假設。

傳奇統計學者Persi Diaconis(西元1945年出生於紐約,14歲時離開學校在街頭變魔術維生,24歲時到紐約市立學院(City College)的夜間部就讀,1971年畢業隨即進入哈佛大學統計系,而

於1974年完成博士學位)。他熟悉Efron及Thisted的分析。據他講,他第一次讀這首泰勒詩時,覺得這一點也不像莎士比亞的作品,他認為只要做一些數值分析,就可以證明詩中字所擺的位置完全是錯的。但讀了Efron及Thisted的分析後,他相信這首詩很可能是莎士比亞所作。

Efron強調他們的分析並無法證明這首泰勒詩真是莎士比亞寫的。但他說這首泰勒詩在罕用字的使用情況,如此吻合莎士比亞的總作品,確實令人驚訝。

Efron及Thisted也對John Donne (1572?-1631), Christophor Marlowe (1564-1593)及Ben Jonson (1573-1637)等三位約略與莎士比亞同時代的詩人,各取一首詩,及另取四首莎士比亞的詩,與這首泰勒詩做比較。

經過三種嚴密的統計檢定,發現對前三首(非莎士比亞之作品),罕用字出現次數之實際值與預測值(假設其為莎士比亞所作)皆不吻合。而雖然挑選的四首莎士比亞的詩偶而有不吻合處,總的來說是可接受的。本來僅是一師生的遊戲之作,說不定當初還被“有識之士”視之為紙上談兵,十年後竟令那些向來不常接觸統計的學者折服。

4 隨機思考

著名的蝴蝶效應是這樣的:今天北京市上空飛翔著一隻蝴蝶,對空氣所造成的擾動,可能觸發下個月紐約的一場暴風雨。

蝴蝶效應是源自於有些複雜的系統,即使初始值只有些微小的差異,但差異會逐漸增大,最後產生巨大的落差。

在雙面情人(Sliding Doors)那部電影裡,一位原本有美滿生活的公關經理,因意外遭到革職,而比平常早回家,兩種不同的選擇(搭上或未搭上地鐵),使她的人生走向完全不同的旅途。

對自然的探索,了解宇宙的奧秘,一直是人們所追求的。遠在夏朝,夏人便根據月球的運行而制定了陰曆,一年共12個月,且已知道用閏法,並將一年分為春夏秋冬四季。到了商朝,除了可推測月食,又以365又1/4日為一年,每年分為12個月,大月30日,小月29日,剩餘的日數設閏月。商代並且用天干和地支相配來記日,60日為一周,周而復始。這種記日法,經過三千多年,毫無錯誤。

古人的耐心及觀察力是令人佩服的。由於長時間的觀測,他們發現天體運行的許多規律性。諸如太陽的突然不見了,並非老天發怒,或被天狗吃掉了(因此不用敲鑼打鼓把太陽叫出來),而是因星球運轉下之一可預期的日食天文奇景。

由於自然現象影響著我們的生活,所以人們對“掌管”著這一切變化的上天是極敬畏的,總是盡量討好上天。而各種特殊的自然景象如久不下雨或各種祥瑞,也往往被賦予特殊的意義。例如,在二月河(1994)p.221,史貽直認為“京師久旱不雨乃是因朝有奸臣”。又在二月河(1997)p.150,乾隆皇帝南巡時,特地至儀徵城觀賞三株老槐合抱迎春的祥瑞。皇太后見了,口中唸唸有辭“佛祖有靈,保佑我大清國祚綿長,子孫繁昌!觀世音菩薩有靈,祐護皇帝皇后天下子民熙和安康!”將久旱不雨及三槐抱春,視為上天要傳達給人們某類訊息。

哈雷(Halley, 1656-1742)為英國的天文學家和數學家。他在西元1705年指出, 西元1531, 1607及1682年觀測到的彗星, 實際上是同一顆, 他並預測該彗星將在西元1758年末再次回歸。他的預言果然為真。世人為了紀念哈雷的貢獻, 遂將該彗星命名為哈雷彗星。後來天文學家發現, 其實自西元240年起, 每隔76年左右出現的那顆彗星, 都是哈雷彗星。歷史上哈雷彗星的出現往往受到當時世人的重視, 並有許多穿鑿附會, 但自此人們知道它的出現原來是如此的有規律。

由於前有古人, 後有來者, 一代一代對知識的追求, 宇宙間很多規律性(不只是天體運行), 逐漸被人們了解。以數學為例, 平面幾何學裡有各種關於圖形的規律性。那種種毫無例外的性質實令人感到神奇。這些發現, 多半源自距今兩千五百多年前, 古希臘時代的畢達哥拉斯(Pythagoras, 約西元前580-500年, 畢氏定理即以他命名)。而後歐幾里得(Euclid, 約西元前375-300年), 把從畢達哥拉斯及其追隨者等先輩開創出來之工作, 有系統的整理成幾何原本(Elements)一書。此書至少到十九世紀非歐幾何學出現之前, 一直是平面幾何學的推理、定理和方法的主要源泉, 今日中學平面幾何學裡的内容大約都不超過該書的範圍。

在幾何原本第九卷的最後一命題為完全數(perfect number)的討論。所謂完全數即一數等於小於它的所有因數的和。 6 是第一個完全數, $6=1+2+3$ 。 28 是第二個完全數, $28=1+2+4+7+14$ 。古希臘時覺得這些數字具有特別的象徵和神秘的意義。 6 也確實與宗教裡的一些完美性相關連。在西方聖經的創世記裡記載, 上帝在六天內創造了世界, 因此古代人認為 6 是一個很完美的數字。目前的曆制, 一星期有 7 天, 一個月是 4 星期(即 28 天)又多一些, 28 也是一為人所樂意接受的數字。古希臘時代只知道四個完全數, 在幾何原本第九卷的最後一句話寫著“ $6, 28, 496, 8, 128$ 等皆是完全數”。歐幾里得發現, 這四個完全數皆可表示成 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 的型式, n 分別為 $2, 3, 5, 7$ 。

歐幾里得也看出當 $n = 2, 3, 5, 7$ 時, $2^n - 1$ 皆為質數(一大於 1 之整數, 若除了 1 與本身外無其他因數便稱質數)。這項觀察使他在幾何原本裡證明了下述定理:若 $2^n - 1$ 為一質數, 則 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 為一完全數。

歐幾里得給出了找偶完全數的充分條件, 但是否尚有其他偶完全數呢?歐幾里得之後約兩千年, 歐拉給出了找偶完全數的必要條件:偶完全數必呈 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 的型式, 且 $2^n - 1$ 為一質數。

至此人們知道偶完全數是如何產生的, 毫無例外的, 就是 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 的型式, 且 $2^n - 1$ 為一質數。偶完全數的尋找至今仍方興未艾。近年來, 由於網際網路的興起, 加速了偶完全數的誕生。至西元2000年2月底止, 共已知38個偶完全數(其中前37個見黃文璋(1999)第一章)。最大的是

$$2^{6,972,592}(2^{6,972,593} - 1)$$

至於是否有奇完全數存在呢?仍然未知。

費馬最後定理(Fermat's Last Theorem), 這可能是數學裡最吸引人的定理。歷史上, 沒有一個數學的問題, 其敘述是如此簡單, 但受到的重視卻又無與倫比。

費馬(Fermat, 1601-1665)為法國人, 職業是律師, 業餘時研究數學。費馬死後, 西元1670年, 他兒子整理他的筆記及文稿, 發現他在在一本書的頁邊寫著“另一方面, 將一立方數分成兩個立

方數，或將一四次方數分成兩個四次方數，或一般地，除了二次方外，任意次方數皆不能分成兩個同次方的數。我已發現一絕妙無比的證明，但此頁邊不夠大無法寫下。”後人推測此段話約寫於西元1637年。費馬的意思即方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

當 $n \geq 3$ 時，除了 $x = y = z = 0$ 外，沒有整數解。這就是花了許多著名數學家無數的心血，歷經三百五十餘年，在西元1994年，才被年輕數學家Wiles所解決的費馬最後定理。

諸位看，對每一 $n = 3, 4, 5, \dots$ ，除了 $x = y = z = 0$ 之外， $x^n + y^n = z^n$ 皆無整數解。費馬怎麼看出來的固然令人匪夷所思，但這種斬釘截鐵的結果卻一向是數學家所喜愛的。

不論宇宙間的各種變化，以及科學裡的各種現象，長久以來人們所追求的及所突破的，可說大抵都是必然性。如天體運行的規律性、幾何學裡種種美妙的性質、偶完全數一定是什麼型式，及某類方程式一定無解等，皆屬必然性的例子。至於不是必然性的，如明天會不會下雨就不清楚了，雖然我們可準確地算出哈雷彗星下次來的時間。又如讓手上的銅板以自由落體的方式落地，則那一面朝上，並無法預知，雖只要高度固定，我們可準確算出落地所需時間(這是中學裡物理課程的內容)。所以在非必然性方面，有很長一段時間，人們即使不是繳白卷，成就也是很侷限。

事實上整個宇宙的運行，穿插著必然性與隨機性。由於疏忽或不了解隨機性，才會想不透廟裡供奉一向很靈的菩薩為何現在不靈了?明明是八字很配的婚姻，為何玫瑰戰爭(The War of the Roses, 1989, 由邁克道格拉斯(Michael Douglas)和凱薩琳透納(Kathleen Turner)主演)不停。

由於隨機性的處處存在，因此我們在分析判斷事情時，自然要以隨機性為基礎。例如，不要就很肯定地認為明天一定下雨、雙子座一定如何、考上高雄女中一定較讀別的中學好、人之初一定是性本善，或某種藥必能治好某種病等。隨機思考為眾多思考能力中，很重要的一要素。至於隨機思考的能力如何培養呢?藉由對數學的一分支也就是機率統計的了解，應有極大幫助。

你聽後可能大為放心，因過去早已學過不少的機率統計了。問題倒不見的那麼簡單。

我們藉一簡單的例子來說明。

假設生男生女的機率皆為 $1/2$ 。你看到有某孕婦，則猜她會生男的機率為 $1/2$ 是合理的。某日有人按你家門鈴，在開門前要不要猜按鈴者是男或是女的機率?當然都是 $1/2$ 。對一有兩個小孩的家庭，若是一男孩及一女孩，一般認為這是不錯的組合，剛好是中文裡的”好”字。你可能認為不太稀奇，因有男女及女男兩種可能，而其機率各為 $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ ，因此有一半的機率兩個小孩為一男及一女。這一切都是基於一個人會是男或女的機率各為 $1/2$ 。真是這樣嗎?

某日你至友人家拜訪，你早知他有二小孩，按門鈴後有一女孩替你開門。坐定後你順口問友人他是否有一男孩?他給你肯定的答案。於是你誇獎他命好，一男一女最完美。又一回你另一朋友也有二小孩，其中有一男孩，你又問他是否另一個為女孩?又是肯定的答案。於是你又瞎捧一番。現在不少家庭都是兩個小孩，每回若你知道其中一個是男孩，便猜另一為女孩;而若知其中一個為女孩，便猜另一個是男孩。本來只是為了讓對方高興，長期下來，居然猜中的比例不

小,似乎是一半以上。於是你有點納悶,不要說一男一女的家庭是半數以上為不合理,一小孩為男或女的機率似乎都不是 $1/2$ 了,這究竟是怎麼回事?

一家庭二小孩的性別有4種可能,即男男、男女、女男、女女,每一種可能之機率皆為 $1/4$ 。若已看到一女孩,便知必為男男之外的三種可能之一,而其中有兩種可能會有男孩(男女及女男),因此另一小孩為男孩之機率為 $2/3$ 。若已看到一男孩之情況類似,另一小孩為女孩之機率亦為 $2/3$ 。原來你以為自己經常猜對,其實並不是巧合,乃是有依據的。而道理也就是這麼淺顯不過。

你覺得奇怪嗎?這就是條件機率(conditional probability)。任選一人為男或女的機率,由過去的經驗,可設為 $1/2$,此即所謂事前機率(prior probability)。但若給了一些條件,則在這些條件下,其機率是有可能改變的。此時之機率,便稱為條件機率,是一種事後機率(posterior probability)。譬如說,你若到高雄女中任選一人,還會覺得挑中的是男生的機率為 $1/2$ 嗎?有人來敲你門,你聽到像高跟鞋的走路聲,難道不猜此人大約是女生嗎?給你一些條件,或說知道某些資訊,對事務的判斷將更精準,本來就很合理。福爾摩斯(Holmes)查案,不就一向如此?福爾摩斯由一些蛛絲馬跡做出正確的推測,你對他很佩服。而我們由一明確的資訊(看到一家庭中一小孩為男或女),對另一看不到的事物(另一小孩的性別),只是有較精確些的推測(機率由 $1/2$ 變為 $2/3$),從邏輯上而言,有何不可?我們常以“事後諸葛”取笑人有後見之明。大部分的人當然連事後諸葛都不如,他們甚至連事後機率都無法理解。

其實一般人都知道,即使數據指出,任選一20歲的男生,其體重為60公斤以下的機率為0.5,但對某一特定的20歲男生,若知其身高為185公分,則可能僅會以很低的機率(譬如說0.05),猜其體重不到60公斤。這是因我們知道體重與身高並不“獨立”(independent)。但在一個家庭的兩個小孩中,某一小孩的性別與其排序也不獨立,這就不是那麼明顯了。

即使上述這些簡單的例子,我們也不易做出正確的判斷,更何況我們所處的是一個如此複雜的隨機世界。

隨機就是有不確定性。由於這是個不確定性到處可見的世界,對隨機的內涵有些基本的了解,當有助於我們在這隨機世界活得更好。數學家A. F. M. Smith曾說“在我看來,任何尋求以單一答案解決複雜的不確定性狀態的科學推論方法,都是基於威權心態,對理性學習過程的拙劣模仿”(見張定綺譯(1998)p.147)。的確是如此,在隨機世界裡,多半狀態是不確定的,對事務的分析判斷,往往不能只尋求單一答案。市井小民如此,醫生如此,擔負國家重任者也該如此。以為凡事都該有個明確的選擇者,如果不是威權,就是愚昧了。

從前有個舉人進京準備應試,有天至一算命攤,算命者鐵口直斷他必高中一甲狀元進士。他聽了大喜,開始花天酒地。考前兩天經過那算命攤,算命者一見到他,便說他印堂發黑,精神恍惚,必落榜無疑。此舉人大驚之下,收心勤奮讀書,總算勉強考上。

事實上,算命者第一次應是認為,以那舉人當時的情況,狀元及第的機會很大,但該舉人自己將其狀態改變了,結果當然有變了(這是所謂條件機率)。

自機率統計的課程中,最要緊的是學到隨機思考的能力,因而做出較佳的決策。

5 創意思考

人類文明的躍昇，要仰賴創造發明。什麼是創造性？最高一等的創造性是新思想或新理論的產生。而對現有知識所做的邏輯上的推廣，當然也是一種創造性。思維能不受現有知識的束縛才較易創造。而第一等的創造，也不易由邏輯推演得到。不過能創造的人，其邏輯思考、抽象思考及隨機思考的能力通常也會很好。思考要能上窮碧落隨機搜索，才較可能跳出已有的框架。要能創造發明的人，其思考常是較有創意的。有創意並不同於能創造出重要的新事物。因一件創作是否重要，尚有許多外在主客觀的因素。但無論如何具備創造思考能力，是大家所追求的。可惜這是一種較難的思考能力。

即使在武俠小說裡，高手雖多，能自創武功的並不多。下述人物則為一具開創性者。

他得覺遠傳授甚久，於這部九陽真經已記了十之五六，十餘年間竟然內力大進，其後多讀道藏，於道家鍊氣之術更深有心得。某一日在山間閒遊，仰望浮雲，俯視流水，張君寶若有所悟，在洞中苦思七日七夜，猛地裏豁然貫通，領會了武功中以柔克剛的至理，忍不住仰天長笑。

這一番大笑，竟笑出了一位承先啓後，繼往開來的大宗師。他以自悟的拳理、道家沖虛圓通之道和九陽真經中所載的內功相發明，創出了輝映後世、照耀千古的武當一派武功。

後來北遊寶鳴，見到三峰挺秀，卓立雲海，於武學又有所悟，乃自號三丰，那便是中國武學史上不世出的奇人張三丰。

在數學裡總會遇到難題。所謂難題就是不是標準題，沒法模仿現有的例子。在解難題的過程，是可能培養出一些創意。只是我們要承認創意思考的能力是大家最想追求，但也是較難的一種。天份、機緣還是佔很大的因素。

參考文獻

1. 二月河(1994). 雍正皇帝—雕弓天狼<下>。巴比倫出版社,台北。
2. 二月河(1997). 乾隆皇帝—天步艱難<上>。巴比倫出版社,台北。
3. 金庸(1996). 倚天屠龍記,第三版。遠流出版社,台北。
4. 黃文璋(1999). 數學欣賞。華泰文化事業股份有限公司,台北。
5. 張定綺譯(1998). 與天為敵—人類戰勝風險的傳奇故事。商業周刊出版股份有限公司,台北。
6. Efron, B. and Thisted, R. (1976). Estimating the number of unseen species: How many words did Shakespeare know? *Biometrika* 63, 435-447.
7. Thisted, R. and Efron, B. (1987). Did Shakespeare write a newly-discovered poem? *Biometrika* 74, 445-455.