九十九學年度第二學期　機率論 (一)　測驗一

考試日期及時間：100年4月18日10:10–12:00　　教師：黃文璋

第1-3題各10分, 第4-8題各14分, 該有的步驟須附上 。

1. 設$\Omega = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ 。令$X(\omega) = \omega^2$, $\omega \in \Omega$; $Y(\omega) = -1$, 若$\omega = -3, -2, -1$, $Y(\omega) = 1$, 若$\omega = 1$, $Y(\omega) = 2$, 若$\omega = 2, 3$ 。試給

   (i)最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}_1$, 使得Y爲一r.v.;

   (ii)最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}_2$, 使得$U = Y^2$爲一r.v. 。

2. 設$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F}$爲包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\}) = 1/4$, $\forall \omega \in \Omega$ 。令$X(1) = X(2) = 0$, $X(3) = X(4) = 1$, $Y(1) = Y(3) = 2$, $Y(2) = Y(4) = 3$ 。試問X與Y獨立否?

3. 設$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F}$爲包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\}) = 1/6$, $\forall \omega \in \Omega$ 。試判斷可否在$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上, 定義出有二項分佈的r.v.?若“否”則證明; 若“可”則將所有這種r.v's, 及伴隨的二項分佈皆給出 。

4. 設Ω爲一可數的無限集合 。令$\mathcal{F}$爲一包含Ω之所有有限子集, 及其餘集之集合 。在$\mathcal{F}$上定義函數P, $P(A) = 0$或1, 依A爲有限或無限而定 。試證

   (i)$\mathcal{F}$爲一體;

   (ii)P具有限的加性;

   (iii)對$\mathcal{F}$中的互斥事件$\{A_i,\ i \geq 1\}$, 且$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$不一定等於$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 。

5. 獨立地投擲一公正的骰子K次, 令A_{ij}表第i及第j次得到相同點數之事件 。試證事件$\{A_{ij}, 1 \leq i < j \leq K\}$爲每對獨立, 但不相互獨立 。

6. 設 Y, Z爲 i.i.d.$\mathcal{U}(0, 1)$分佈之r.v.'s 。試求 x 之二次方程式 $x^2 + 2xY + Z = 0$有實根之機率 。

7. 設X, Y爲二獨立的$\mathcal{U}(0, 1)$分佈r.v.'s 。令

$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y),$$
$$V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y) \text{ 。}$$

   試證U與V獨立, 並求其邊際分佈 。

8. 設$X_1, \cdots, X_n$爲 i.i.d.$\mathcal{U}(0, 1)$分佈之 r.v.'s, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$表其順序統計量 。令$X_{(0)} = 0$, $X_{(n+1)} = 1$ 。又令$U_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}$, $1 \leq k \leq n+1$ 。

   (i)試求U_k之p.d.f. 。

   (ii)試指出U_k有那一常見分佈, 並給出參數 。

   (iii)試求$P(U_k > t)$, $0 \leq t \leq 1$ 。