

九十九學年度第二學期 微積分 測驗三

考試日期及時間：100年6月21日8:05–9:55 教師：黃文璋

1-8題各10分，該有的步驟須附上，第9題40分。

1. 試檢定 $\int_0^1 x^4 \log x dx$ 之斂散性，若收斂並求其值。
2. 試決定常數 c 之值使 $\int_1^\infty (\frac{x}{2x^2+2c} - \frac{c}{x+1}) dx$ 收斂，並求此時之積分值。
3. 試求在平面 $z = x + 2y$ 之下，與四分之一圓柱 $x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0, z \geq 0$ ，間之立體的體積。
4. 試證 $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} + \sqrt{z/c} = 1, a, b, c > 0$ ，之圖形與三座標平面所圍出之立體的體積為 $V = abc/90$ 。
5. 試求 $\iiint_S (x+y+z)x^2y^2z^2 dxdydz$, S 為介於 $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ，間之區域。
6. 試求以球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ 為頂，而在拋物面 $x^2 + y^2 = 4z$ 之上的區域的體積。
7. 利用極座標之轉換，試證對 $\forall a > 0$,

$$K = \int_0^{a \sin \beta} \left(\int_{y \cot \beta}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \log(x^2 + y^2) dx \right) dy = a^2 \beta \left(\log a - \frac{1}{2} \right),$$

其中 $0 < \beta < \pi/2$ 。

8. 試求 $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^{-2} dxdydz$, 其中 T 為整個 $x-y-z$ 空間。
9. 學算一年記(學微積分一年之心得)。