九十九學年度第一學期　機率論（二）　測驗二

考試日期及時間：100年1月10日10:10–12:00　　教師：黃文璋

每題20分, 該有的步驟須附上。

1. 設$\{X_n,\ n \geq 1\}$爲i.i.d.$\mathcal{E}(\lambda)$分佈之r.v.'s。令$X_{(n)} = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$, $n \geq 1$。試求

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_{(n)} \leq x),\ x \in R$;

   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_{(n)}/\log n \leq x),\ x \in R$;

   (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_{(n)} - \log n/\lambda \leq x),\ x \in R$。

2. 設X有$\Gamma(u,1)$分佈, $u > 0$。又設給定$X = x$, Y有$\mathcal{P}(x)$分佈。

   (i)試求Y之ch.f.。

   (ii)試證$(Y - E(Y))/\sqrt{\mathrm{Var}Y} \xrightarrow[u\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$。

3. 設$\{X_n,\ n \geq 1\}$爲i.i.d.$\mathcal{N}(0,1)$分佈之r.v.'s。令$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$。對$\alpha > 2$, 試證$P(S_n > \sqrt{\alpha n \log n}, \text{ i.o.}) = 0$。

4. 設Y及$X_1, X_2, \cdots$爲i.i.d.$\mathcal{E}(1)$分佈之r.v.'s。試求

   (i)$P(nY > X_1 + \cdots + X_n),\ n \geq 1$;

   (ii)$n \to \infty$時, (i)中機率之極限;

   (iii)$n \to \infty$時, $P(n + \sqrt{n}Y > X_1 + \cdots + X_n)$之極限。

5. 先設$\{X_n,\ n \geq 1\}$爲i.i.d.之正且有限的r.v.'s。試分別給出使下述各極限成立的充要條件。

   (i)$X_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$;

   (ii)$X_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 0$;

   (iii)$\max\limits_{1\leq i\leq n} X_i/n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$;