九十九學年度第一學期　機率論（二）　測驗一

考試日期及時間：99年11月22日10:10–12:00　　教師：黃文璋

第1-7題各12分, 第8題16分, 該有的步驟須附上 。

1. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$為 i.i.d.$\mathcal{N}(0,1)$分佈之r.v.'s 。試以函數 Φ來估計 n很大時, $P(X_1^2 + \cdots + X_n^2 \leq x)$之值, 其中 $x > 0, \Phi$為 $\mathcal{N}(0,1)$分佈之d.f. 。

2. 設$A_{2n-1} = [-1/n, 2)$, $A_{2n} = (-1, 1/n]$, $n \geq 1$ 。試求$\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 及$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 。

3. 設有一機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其中$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$為$[0,1]$上所有Borel集合的集合, 且令$P([0,a]) = a$, $\forall a \in \Omega$ 。令$X_n(\omega) = I_{[0,n^{-1/2}]}(\omega) + e^{\omega^n}$, $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$ 。試給一r.v.X, 使得$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$, 並證明此收斂 。

4. 設$(\Omega, \mathcal{F}, P)$如題3 。令$Y_n(\omega) = nI_{[0,n^{-1/2}]}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$ 。試給一r.v.Y, 使得$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} Y$, 證明此收斂, 並找出使$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} Y$之正數$p$的集合 。

5. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$為獨立的 r.v.'s, 且 $P(X_n = n^2) = n^{-2} = 1 - P(X_n = -1), n \geq 1$ 。試證 $\sum_{j=1}^n X_j \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} -\infty$ 。

6. 設$(\Omega, \mathcal{F}, P)$如題3 。對$\forall n \geq 1$, 令 $X_n(\omega) = \sin(\omega + \omega^n)$, $\omega \in \Omega$ 。

   (i)試給一r.v.X, 使得$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$, 並證明此收斂 。

   (ii)試證$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$, $\forall p > 0$ 。

   (iii)試依定義證明$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ 。

7. 設$\{X_n,\ n \geq 1\}$為每對無相關, 且X_n有$\mathcal{P}(1 + 1/n)$分佈, $n \geq 1$ 。試問$n \to \infty$時, $\overline{X}_n$是否會機率收斂至那一r.v.?

8. 設有r.v.'s $\{X_n, n \geq 1\}$, X_n之p.d.f.為

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)},\ n \geq 1 \text{ 。}$$

   (i)試證$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, 並給出$X$ 。

   (ii)對(i)中之X, 試給出使$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$之$p$的集合 。

   (iii)對(i)中之X, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$是否成立? 不成立? 或不一定?