

# 九十九學年度第一學期 微積分 測驗三

考試日期及時間：100年1月11日 8:05–9:45 教師：黃文璋

第1-4題各10分，第5-8題各15分，該有的步驟須附上。

1. 試求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ 。
2. 試求  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^6 \left( \cos \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{24x^4} \right)$ 。
3. 試求  $\int_1^2 x^{-2} \sin \frac{1}{x} dx$ 。
4. 試求  $\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx$ 。
5. 令  $f(x) = \sin^2 x$ ，利用 cosine函數之倍角公式及泰勒展式，試求  $f(x)$  在 0 之  $2n$  次泰勒多項式。並驗證  $x^{2n}$  項之係數為  $\frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!}$ 。
6. 設  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $x \in R$ 。試繪  $f$  之圖形，並給出漸近線，極值及反曲點。
7. 設  $f(x) = x + \sin^2 x$ ,  $x \in R$ 。試繪  $f$  之圖形，並給出漸近線，極值及反曲點。
8. 試證  $x^2 = x \sin x + \cos x$ ,  $x \in R$ , 恰有二實根。