

# 九十九學年度第一學期 微積分 測驗二

考試日期及時間：99年12月9日8:05–9:45 教師：黃文璋

第1-4題各10分，第5-8題各15分，該有的步驟須附上。

1. 試求 $\int_{-2}^3 [x]dx$ 之值，其中 $[ \cdot ]$ 為最大整數函數。
2. 試求 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$ 。
3. 對二連續函數 $f$ 及 $g$ ，試證 $\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx \geq \left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2$ 。
4. 設

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, & x \geq c, \\ ax^2 + b, & x < c, \end{cases}$$

其中 $a, b, c$ 為常數。試求使 $f'(c)$ 存在之條件，即將 $a, b$ 以 $c$ 表之。

5. 試判斷 $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, 1]$ , 是否均勻連續？並依定義證明之。
6. 設 $p > 1$ ,  $x > 1$ 。試證

$$p(x - 1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x - 1)。$$

7. 令 $f(x) = x^4 \sin(1/x)$ ,  $x \neq 0$ , 且 $f(0) = 0$ 。試求 $f'$ 及 $f''$ ，並討論 $f''$ 之連續性。
8. 設 $n \neq 1$ ,  $a, b \neq 0$ 。試證

$$\int \frac{1}{x^n \sqrt{ax + b}} dx = -\frac{\sqrt{ax + b}}{(n - 1)bx^{n-1}} - \frac{(2n - 3)a}{(2n - 2)b} \int \frac{1}{x^{n-1} \sqrt{ax + b}} dx。$$