

# 九十九學年度第一學期 微積分 測驗一

考試日期及時間：99年10月26日8:05–9:45 教師：黃文璋

第1題40分，第2-7題各10分，該有的步驟須附上。

1. 試求下述各極限值。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2n + 2 \sin n}{2n + 3} \right], \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin(2x)}, \\ \text{(iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin x)^{3 \cot x + \frac{1}{x}}, \quad \text{(iv)} \quad \lim_{y \rightarrow 1} \frac{|y - 1| - y^2 + 1}{|y - 1| + y^2 - 1}, \\ \text{(v)} \quad & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+t^5} - \sqrt[5]{1+t^2}}{\sqrt[3]{1-t^3} - \sqrt[3]{1-t^2}}. \end{aligned}$$

2. 試決定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})$  之值，並依定義證明之。

3. 設  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ ,  $n \geq 1$ 。試證  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在，並求該極限。

4. 對一函數  $f$ , 及二數列  $\{a_n, n \geq 1\}$ ,  $\{b_n, n \geq 1\}$ , 試證或否證  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$  導致  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n)}{f(b_n)} = 1$ 。

5. 設  $a > 0$  為一常數，試依定義證明  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x+1} = \sqrt{a+1}$ 。

6. 設函數  $f(x)$  在  $x = 0$  連續，且  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $x, y \in R$ 。試證  $f$  在  $R$  上連續。

7. 設  $f(x) = 1$ , 若  $x$  為有理數,  $f(x) = 2x - 1$ , 若  $x$  為無理數。試依定義證明  
(i)  $f$  在  $x = 1$  連續; (ii)  $f$  在  $x = 1/2$  不連續。