

九十八學年度第二學期 機率論（一）測驗二

考試日期及時間：99年6月21日10:10–12:00 教師：黃文璋

第1-4題各15分，第5-6題各20分，該有的步驟須附上。

1. 自一單位圓及其內部隨機地取3點。令 X_1, X_2, X_3 分別表3點距圓心之距離，又令 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$ 為其順序統計量。試求 $E(X_{(2)})$ 及 $\text{Var}(X_{(2)})$ 。
2. 設 X, Y 為二獨立的 $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈r.v.'s，令 $Z = XY$ 。試求 Z 之p.d.f.，並驗證 $E(Z) = E(X)E(Y)$ 的確成立。
3. 持續同時投擲一公正的10元硬幣及一公正的50元硬幣，直至二硬幣同時出現正面便停止。試求至停止時，10元硬幣出現正面總次數的期望值。
4. 持續獨立地投擲一出現正面機率為 p 之銅板， $0 < p < 1$ 。令 X_n 表至得到連續 n 次出現正面，所需之投擲數， $n \geq 1$ 。試證 $E(X_n) = \sum_{k=1}^n p^{-k}$ 。
5. 設 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{1 - \rho^2}\right)^{-3/2}, \quad x, y \in R,$$

其中 $|\rho| < 1$ 。試求

- (i) X, Y 之邊際分佈，並指出是那一常見分佈；
- (ii) 紿定 $Y = y, X$ 之條件分佈。
6. 獨立地投擲二公正的骰子，直至出現兩骰子之點數相同便停止。投擲過程中，兩骰子之點數和為7之次數，以 X 表之，兩骰子之點數和為5之次數，以 Y 表之。試求
 - (i) X 之分佈；
 - (ii) $X + Y$ 之分佈；
 - (iii) 紉定 $X + Y = 10, X$ 之條件分佈。