九十八學年度第二學期　機率論（一）　測驗一

考試日期及時間：99年4月26日10:10–12:00　　教師：黃文璋

第1題10分, 第2-7題各15分, 該有的步驟須附上。

1. 設$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F}$為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\}) = 1/4$, $\forall \omega \in \Omega$。令$X(\omega) = \omega$, $Y(\omega) = 2\omega$。試決定$X+Y$之分佈。

2. 設Ω為一可數的無限集合。令$\mathcal{F}$為一包含Ω之所有有限子集, 及其餘集之集合。在$\mathcal{F}$上定義函數P, $P(A) = 0$或1, 依A為有限或無限而定。試證

   (i)$\mathcal{F}$為一體;

   (ii)P有有限的加性, 但無可數的加性。

3. 獨立地投擲一公正的骰子K次, 令A_{ij}表第i及第j次得到相同點數之事件。試證事件$\{A_{ij}, 1 \le i < j \le K\}$為每對獨立, 但不相互獨立。

4. 設$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F}$為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\}) = 1/4$, $\forall \omega \in \Omega$。令$X(1) = X(2) = 0$, $X(3) = X(4) = 1$, $Y(1) = Y(3) = 2$, $Y(2) = Y(4) = 3$。試問X與Y獨立否?

5. 設$X_1, X_2, \cdots$為獨立, 且X_i有$\mathcal{U}(0,i)$分佈, $i \ge 1$。試求

   (i)$P(X_n < X_{n-1} < \cdots < X_2 < X_1)$;

   (ii)$P(X_1 < X_2 < X_3)$。

6. 設X, Y為二獨立的r.v.'s, 且p.d.f.'s分別為

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1,$$
$$f_Y(y) = \frac{y}{\sigma^2} e^{-y^2/(2\sigma^2)},\ y > 0。$$

   試證$Z = XY$有$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$分佈。

7. 設X, Y為二獨立的$\Gamma(p,q)$分佈r.v.'s, 令$Z = X/Y$。

   (i)試求Z之p.d.f.。

   (ii)試由p.d.f.驗證$1/Z \stackrel{d}{=} Z$。

   (iii)設X, Y之共同分佈為$\mathcal{E}(\lambda)$, 試求此時Z之p.d.f.。