

九十八學年度第一學期 機率論（二）測驗二

考試日期及時間：99年1月11日 10:10–12:00 教師：黃文璋

每題20分，須附上適當的步驟。

1. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$ 為 i.i.d. 的 r.v.'s, 且 $E(X_1) = 0$, $\text{Var}(X_1) = 1$ 。試證

$$(i) \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{(\sum_{j=1}^n X_j^2)^{1/2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1);$$

$$(ii) \frac{\sqrt{n} \sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

2. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$ 為 i.i.d. $\mathcal{E}(1)$ 分佈之 r.v.'s。試證 $P(X_n > c \log n, \text{i.o.}) = 0$, 若且唯若 $c > 1$ 。

3. 設有 r.v.'s $\{X_n, n \geq 1\}$, X_n 之 p.d.f. 為

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2 x^2)}, \quad n \geq 1.$$

(i) 試證 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$, 並給出 X 。

(ii) 對(i)中之 X , 試給出使 $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$ 之 p 的集合。

(iii) 對(i)中之 X , $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} X$ 是否成立？不成立？或不一定？

4. $\{X_n, n \geq 1\}$ 為 i.i.d. $\mathcal{C}(0, 1)$ 分佈之 r.v.'s。令 $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $n \geq 1$ 。試求 $\{\pi X_{(n)}/n, n \geq 1\}$ 之極限分佈。

5. 設 X 有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈，且 $a > b > 0$ 為二常數。試證

$$(i) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(|\varepsilon X - a| < b) = 0;$$

$$(ii) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log P(|\varepsilon X - a| < b) = -(a - b)^2/2.$$