# 九十八學年度第一學期　機率論（二）　測驗一

考試日期及時間：98年11月9日10:10–12:00　　教師：黃文璋

每題各20分。

1. 設有一輪盤賭, 每回賭客贏之機率為18/37。現假設每次賭注為1元。試問要賭多少次, 莊家贏至少1,000元的機率至少為1/2。並問在賭這麼多次下, 莊家會輸錢的機率。

2. 設$X_n$有自0開始之$\mathcal{NB}(n,\theta)$分佈, $n \geq 1$, 其中$0 < \theta < 1$。

   (i)試找出$a$, 使得$X_n/n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$。

   (ii)試利用中央極限定理, 估計$n$很大時, $P(X_n \leq x)$之值, $x \in R$。

3. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$為每對無相關的 r.v.'s, 且 $P(X_n = n^\alpha) = P(X_n = -n^\alpha) = 1/2, n \geq 1$。試證$\lim_{n\to\infty} Var(\overline{X}_n) = 0$, 若且唯若 $\alpha < 1/2$。

4. (i)試證或否證一數列之連續型的r.v.'s$\{X_n, n \geq 1\}$, 有可能分佈收斂至一離散型的r.v.。

   (ii)試證或否證一數列之離散型的r.v.'s$\{X_n.n \geq 1\}$, 有可能分佈收斂至一連續型的r.v.。

5. 令$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$為$[0,1]$上所有 Borel 集合的集合, 且令$P([0,a]) = a$, $\forall a \in \Omega$。對$n \geq 1$, 令

$$X_n(\omega) = \frac{2\omega + 3\omega^n + \omega^{n+1}}{2 + \omega^n}, \omega \in \Omega。$$

   (i) 試給一 r.v.$X$, 使得$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$, 並證明此收斂。

   (ii) 試證 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X, \forall p > 0$。

   (iii) 試依定義證明 $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$。