

九十七學年度第二學期 機率論（一）測驗二

考試日期及時間：98年6月15日13:10–15:00 教師：黃文璋

1-2題各10分，3-7題各16分。須附上適當的步驟。

1. 持續同時投擲一公正的10元硬幣及一公正的50元硬幣，直至二硬幣同時出現正面才停止。試求至停止時，10元硬幣出現正面總次數的期望值。
2. 設r.v. X 之ch.f.為

$$\psi(t) = \frac{1}{3}e^{it\sqrt{2}} + \frac{2}{3}e^{it\sqrt{3}}, \quad t \in R.$$

試求 X 之分佈。

3. 設 U_1, U_2 為i.i.d. $\mathcal{U}(0, 1)$ 分佈之r.v.'s。令 $X_1 = U_1, X_2 = U_1 U_2$ 。試求

- (i) X_1, X_2 之聯合p.d.f. $f(x_1, x_2)$;
- (ii) 紿定 $X_2 = x_2, X_1$ 之條件p.d.f. $f(x_1|x_2)$;
- (iii) $E(X_1|X_2 = x_2)$ 。

4. 設 X 與 Y 獨立，皆有 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈。令 $Z = X(1 + Y)$ 。試求

- (i) $E(Z|Y = y)$;
- (ii) $E(E(Z|Y))$;
- (iii) $\text{Var}(E(Z|Y))$;
- (iv) $\text{Var}(Z|X = x)$;
- (v) $E(\text{Var}(Z|X))$ 。

5. 設 X_n 有 χ_n^2 分佈，令 $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{2n}$ ，且以 F_n 表 Y_n 之d.f., $n \geq 1$ 。

- (i) 試求 Y_n 之ch.f.。
- (ii) 試問 $n \rightarrow \infty$ 時， F_n 會弱收斂至何d.f. F ？

6. 持續投擲一點數1出現機率為 p 之骰子，直至連續兩次出現1才停止。令 T 表所需之投擲數。

- (i) 試求 $g(s) = E(s^T), |s| \leq 1$ 。
- (ii) 試利用(i)求 $E(T)$ ；特別地，當 $p = 1/6$ ，給出 $E(T)$ 。

7. A先生每日中午至餐館用餐，他抵達的時間在12時至12時15分間均勻分佈。等待侍者來招呼他點餐的時間有指數分佈，期望值為5分鐘。試求

- (i) 紉定A先生點餐的時間為12時15分，A先生抵達餐館的時間在12時5分之前的機率；
- (ii) 紉定A先生點餐的時間在12時15分之前，A先生抵達餐館的時間在12時5分之前的機率。