九十七學年度第二學期　機率論（一）　測驗一

考試日期及時間：98年4月13日1:10–3:00　　教師：黃文璋

1-4題各10分, 5-8題各15分 。須附上適當的步驟 。

1. 設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 。試給出一機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其中$\mathcal{F}$為包含$\{2,3\}$, 及$\{3,4\}$之最小的$\sigma-$體, 且$P(\{2,3\}) = 0.3$, $P(\{3,4\}) = 0.5$ 。

2. 設$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F}$為包含Ω之所有子集的$\sigma-$體, $P(\{\omega\}) = 1/4$, $\forall \omega \in \Omega$ 。令$X(1) = X(2) = 0$, $X(3) = X(4) = 1$, $Y(1) = Y(3) = 2$, $Y(2) = Y(4) = 3$ 。試問X與Y獨立否?

3. 設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 。令$X(\omega) = 2$, $\omega = 1,2,3,4$, $X(\omega) = 7$, $\omega = 5,6$ 。
   (i) 試給一最小的$\sigma-$體$\mathcal{F}$, 使得X為一r.v. 。
   (ii) 試在$\mathcal{F}$上定義一機率函數P 。
   (iii) 對(ii)中之P, 試給出X之分佈函數F 。
   (iv) 試給出$Y = X^2$之p.d.f. 。

4. 試給3個事件A, B, C, 其中A與B, A與C皆獨立, 但A與$B \cup C$不獨立 。

5. 設X,Y為二獨立之$\mathcal{E}(\lambda)$分佈 r.v.'s, 令$Z = X - Y$ 。試求Z之d.f., 因而得到p.d.f. 。

6. 設X與Y獨立, X有$\mathcal{N}(0,1)$分佈, 而$f_Y(y) = (2/\sqrt{2\pi})e^{-y^2/2}G(y), y \in R$, 其中$G(y) > 0$, 且$G(-y) = 1 - G(y)$, $\forall y \in R$ 。試證X/Y有$\mathcal{C}(0,1)$分佈 。

7. 設X,Y為二獨立的$\mathcal{U}(0,1)$分佈r.v.'s, 令$Z = X/Y$ 。
   (i) 試求Z之p.d.f., 並驗證此確為一p.d.f. 。
   (ii) 試驗證$1/Z \stackrel{d}{=} Z$ 。

8. 將 n個球隨機地放進 r個盒子中, $n \geq 1$, $r \geq 2$ 。令 $X_i = 1$, 若第 i個盒子是空的, 否則 $X_i = 0, i = 1, \cdots, r$ 。試求
   (i) $E(X_i)$;
   (ii) $E(X_i X_j)$, $i \neq j$;
   (iii) $E(S_r)$及 $\mathrm{Var}(S_r)$, 其中S_r表空盒子的數目 。