

# 九十七學年度第一學期 機率論（二）測驗二

考試日期及時間：98年1月12日 10:10–12:00 教師：黃文璋

每題20分，須附上適當的步驟。

1. 設  $\{X_n, n \geq 1\}$  為 i.i.d. 之 r.v.'s, 且  $E(X^2) < \infty$ 。試證  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} nP(|X| \geq \varepsilon\sqrt{n}) = 0$ 。
2. 設  $Z_n = X_n/n$ ,  $X_n \sim Ge(\lambda/n)$ ,  $n > \lambda > 0$ 。試求  $n \rightarrow \infty$  時,  $Z_n$  之極限分佈。
3. 設  $\{Z_n, n \geq 1\}$  為獨立之 r.v.'s, 且

$$P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 1) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{若 } n \text{ 為偶數,} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 為奇數。} \end{cases}$$

- (i) 試證  $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$ , 但  $\{Z_n, n \geq 1\}$  不幾乎確實地收斂至任一 r.v.。
- (ii) 試給出一子數列  $Z_{n_k}, k \geq 1$ , 使得  $\{Z_{n_k}, k \geq 1\}$  幾乎確實地收斂。
4. 設  $X_1, X_2, \dots$  為 i.i.d. 以  $\mathcal{U}[0, 1]$  為共同分佈。令  $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 。試證  
(i)  $X_{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{q.m.} 1$ , (ii)  $X_{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 1$ 。
5. 設  $\{X_n, n \geq 1\}$  為 i.i.d. 之 r.v.'s 以  $\mathcal{C}(0, 1)$  為共同分佈。對一正項數列  $\{a_n, n \geq 1\}$ , 試證  $P(|X_n| \geq a_n, i.o.) = 0$  或  $1$ , 且依  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n < \infty$  或  $= \infty$  而定。