

九十七學年度第一學期 機率論（二）測驗一

考試日期及時間：97年11月5日 10:10–12:00 教師：黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 設 X_n 有 $\Gamma(np, q)$ 分佈, $n \geq 1$, $p, q > 0$ 。試證 $X_n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a$, 並給出 a 。
2. 設 X_n 有 $\mathcal{N}(n+1, n+n^{1/2})$ 分佈, 令 $Y_n = (X_n - n)/\sqrt{n}$, 且以 F_n 表 Y_n 之分佈函數, $n \geq 1$ 。
 - (i) 試求 Y_n 之 ch.f. $\psi_n(t)$, $t \in R$, $n \geq 1$ 。
 - (ii) 問 $n \rightarrow \infty$ 時, $\{F_n, n \geq 1\}$ 是否弱收斂至何分佈?
3. 設 $Y = \log X$ 有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。
 - (i) 試求 X 之 p.d.f.。
 - (ii) 試求 $E(X^n)$, $n \geq 1$ 。
 - (iii) 試證 $E(e^{tX})$ 不存在, $\forall t > 0$ 。
4. 設 $\{X_n, n \geq 1\}$ 為每對無相關的隨機變數, 且 X_n 有 $\mathcal{E}(n^{-\alpha})$ 分佈, $n \geq 1$ 。又設 $\alpha \leq 0$ 。試證 $n \rightarrow \infty$ 時, $\bar{\mu}_n \rightarrow \bar{\mu}$, 並給出 $\bar{\mu}$, $\text{Var}(\bar{X}_n) \rightarrow 0$, 且 $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \bar{\mu}$ 。
5. 對 $n \geq 1$, 設 X_1, \dots, X_n 為相互獨立, 且以 $\mathcal{U}(0, 1)$ 為共同分佈。令 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 表其順序統計量。試證 $X_{(2)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$ 。