

# 九十七學年度第一學期 數理統計（一）測驗二

考試日期及時間：98年1月15日10:10–12:00 教師：黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 設  $X_1, \dots, X_{n+1}$  為一組由  $\text{Ber}(p)$  分佈所產生之隨機樣本,  $0 < p < 1$ ,  $n \geq 3$ 。令  $\theta = P(\sum_{i=1}^n X_i > X_{n+1})$ 。試求  $\theta$  之一UMVUE。
2. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\mathcal{P}(\lambda)$  分佈所產生之隨機樣本,  $\lambda > 0$ 。試求  $e^{-\lambda}$  之一UMVUE。
3. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\mathcal{U}[1, 1 + \theta]$  分佈所產生之隨機樣本,  $\theta > 0$ 。
  - (i) 試求  $\theta$  之MLE  $T_1$ , 又問  $T_1$  是否不偏?
  - (ii) 試求  $\theta$  之動差估計量  $T_2$ , 又問  $T_2$  是否不偏?
  - (iii) 試比較  $T_1$  與  $T_2$  之MSE。
4. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\Gamma(\alpha, \theta)$  分佈所產生之隨機樣本,  $\alpha$  為已知,  $\theta > 0$ 。
  - (i) 試給出  $\theta$  之一UMVUE  $T_1$ , 並證明  $\text{Var}(T_1)$  達到CRLB。
  - (ii) 設  $n\alpha > 2$ 。試給出  $1/\theta$  之一UMVUE  $T_2$ , 並判斷  $\text{Var}(T_2)$  是否達到CRLB。
5. 設  $X_1, \dots, X_n$  為一組由  $\text{Be}(\theta, 1)$  分佈所產生之隨機樣本,  $\theta > 0$ 。令  $T(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^n \log X_i/n$ 。試以資訊不等式證明  $T(\mathbf{X})$  為  $1/\theta$  之一UMVUE。