

九十六學年度第二學期 機率與統計 測驗二

考試日期及時間：97年5月19日10:10–12:00 教師：黃文璋

第1-3題各10分，第4-5題各20分，第6題30分。須附上適當的步驟。

1. 投擲一公正的銅板100次，試估計正面數介於45至59間之機率(採連續性的更正)。
2. 設 X 有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。試給出 $P(|X| \geq 2)$ 之值，並以柴比雪夫不等式給出此機率之一上界。
3. 設 X 有 $\Gamma(100, 1)$ 分佈。試利用中央極限定理，求 $P(85.2 < X \leq 111.1)$ 之一近似值。
4. 假設射飛鏢所中的點之座標為 (X, Y) ，設 X 與 Y 獨立，且皆有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。獨立地射兩次，令 Z 表兩次位置之距離。試求 Z 之p.d.f.。

5. 設 (X, Y) 之聯合p.d.f.為

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2} (1 + xye^{-(x^2+y^2-2)/2}), \quad x, y \in R.$$

(i) 試證 $f(x, y)$ 確為一二變數之p.d.f.。(ii) 試求 X, Y 之邊際分佈。

6. 設 $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, 0, 1, 1, \rho)$, $|\rho| < 1$ 。令 $V = (X^2 + Y^2 - 2\rho XY)/(1 - \rho^2)$ 。

(i) 試證 V 可改寫成 $V = (X - \rho Y)^2/(1 - \rho^2) + Y^2$ 。

(ii) 令 $Z_1 = (X - \rho Y)/\sqrt{1 - \rho^2}$, $Z_2 = Y$ 。試證 Z_1 與 Z_2 獨立，且皆有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。

(iii) 利用(i)及(ii)求 V 之分佈。

(iv) 設 U 有 χ^2_2 分佈，試求 $E(e^{-sU})$, $s \geq 0$ 。

(v) 試直接求 $E(e^{-sV})$, $s \geq 0$ 。