九十六學年度第二學期　機率論　測驗二

考試日期及時間：97年6月14日9:30–11:30　　教師：黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 將 n個球隨機地放進 r個盒子中。令 $X_i = 1$, 若第 i個盒子是空的, 否則 $X_i = 0, i = 1, \cdots, r$。

   (i) 試求 $E(X_i)$。

   (ii) 對 $i \neq j$, 試求 $E(X_i X_j)$。

   (iii) 令 S_r表空盒子的數目, 試求 $E(S_r)$及 $\mathrm{Var}(S_r)$。

2. 設 X有 $\mathcal{N}(0,1)$分佈, 令$Y = e^X$。

   (i) 試求 Y之p.d.f.。

   (ii) 試求 $E(Y^n)$, $n \geq 1$。

   (iii) 試證 $E(e^{tY})$不存在, $\forall t > 0$。

   (iv) 試舉一由給定所有動差, 並無法決定分佈之例。

3. 設 X_1, X_2, X_3為 i.i.d.之 $\mathcal{U}(0,1)$ r.v.'s, 令$Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3$表X_1, X_2, X_3之順序統計量。試求給定 $Y_2 = y, 0 < y < 1$, Y_1, Y_3 之聯合 p.d.f., 並驗證此確為一 p.d.f.。

4. 設 X, Y為二獨立的 r.v.'s, 分別有 $\mathcal{E}(\lambda_1)$及$\mathcal{E}(\lambda_2)$分佈, 令$Z = \min\{X, Y\}$。試求給定 $Z = X$, X之條件分佈及條件期望值。

5. 設 X有 $\Gamma(p, \lambda)$分佈, $p \leq 1$, 其 p.d.f.以 f表之。試證

   (i) $f(x) = \int_0^\infty g_\lambda(y) y e^{-yx} dy$, 其中

$$g_\lambda(y) = \begin{cases} \frac{(\lambda y - 1)^{-p}}{y\Gamma(1-p)\Gamma(p)} & , \lambda y \geq 1, \\ 0 & , \lambda y < 1; \end{cases}$$

   (ii) $g_\lambda(y)$為一 p.d.f., $\forall \lambda > 0$。