九十六學年度第二學期　機率論　測驗一

考試日期及時間：97年4月22日10:10–12:00　　教師：黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 投擲一骰子一次, 令A表得到1或6, B表得到奇數。

   (i) 若此為一公正的骰子, 試證A與B獨立。

   (ii) 若此骰子未假設是公正，則A與B是否獨立？試證或否證之。

2. 設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$。令$X(\omega) = 2$, $\omega = 1,2,3,4$, $X(\omega) = 7$, $\omega = 5,6$。

   (i) 試給最小的σ-體$\mathcal{F}$, 使得X為一r.v.。

   (ii) 試在$\mathcal{F}$上定義一機率函數P。

   (iii) 試給出X之分佈函數F。

   (iv) 試給出$Y = X^2$之p.d.f.。

3. 令$\Omega = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$。令$X(\omega) = \omega^2, \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = -1$, 若$\omega = -3,-2,-1$, $Y(\omega) = 1$, 若$\omega = 1$, $Y(\omega) = 2$, 若$\omega = 2,3$。

   (i) 試給最小的σ-體$\mathcal{F}_1$, 使得X為一r.v.。

   (ii) 試給最小的σ-體$\mathcal{F}_2$, 使得Y為一r.v.。

   (iii) 試給最小的σ-體$\mathcal{F}_3$, 使得$U = Y^2$為一r.v.。

   (iv) 試給最小的σ-體$\mathcal{F}_4$, 使得X, Y皆為r.v.'s。

4. 設$X_1, \cdots, X_n$為$i.i.d.$之$\mathcal{U}(0,1)$r.v.'s。令$X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$表其順序統計量。又令$U_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}$, $2 \le k \le n$。

   (i) 試求U_k之p.d.f.。

   (ii) 指出U_k有那一常見分佈, 並給出參數。

   (iii) 試求$E(U_k)$。

   (iv) 試求$P(U_k > t), 0 \le t \le 1$。

5. (i) 設U與V獨立, 且U, V皆有對稱分佈。試證$U + V$亦有對稱分佈。

   (ii) 設U與V獨立, 且U有對稱分佈。試證UV亦有對稱分佈。

   (iii) 試舉一例顯示, 若U與V不獨立, 則即使U, V皆有對稱分佈, UV不一定有對稱分佈。

   (iv) 設U與V分佈相同, 且$U + V = a$, 其中$a > 0$為一常數。試證$P(U > 0) \ge 1/2$。