九十四學年度第一學期　隨機過程　測驗二

考試日期: 95年1月18日　　教師: 黃文璋

每題20分, 須附上適當的步驟 。

1. 設$\{N(t), t \geq 0\}$為一更新過程, 到達間距為$\{X_n, n \geq 1\}$, 以F為共同分佈函數, $F(0) = 0$ 。令$M(t) = E(N(t))$ 。試證$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x)$ 。

2. 有一系統, 新的成員進入系統之速率為$\alpha > 0$, 每一成員離開系統之速率為$\mu > 0$ 。令$X(t)$表時間t在系統之成員數, $X(0) = i$ 。又令$G(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) z^j$, $|z| \leq 1, t \geq 0$, 其中$p_{ij}(t) = P(X(t) = j | X(0) = i)$ 。

   (i)試證$G(z,t) = (1 + (z-1)e^{-\mu t})^i \exp\{\frac{\alpha}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})\}$ 。

   (ii)試求$t \to \infty$時, $X(t)$之極限分佈 。

3. 設$N = \{N(t), t \geq 0\}$為一更新過程, 且$\mu = E(X_1) < \infty$, 其中X_1為第一個到達間距 。令n為一固定正整數 。設只要$P(N(t) = n) > 0$, 則$E(\gamma_t | N(t) = n) = C$, C為一常數, $\forall t > 0$ 。試證N為一Poisson 過程 。

4. 設$N_1 = \{N_1(t), t \geq 0\}$, $N_2 = \{N_2(t), t \geq 0\}$為二獨立的更新過程, 且$N_1, N_2$之到達間距分別有參數$\lambda$及$\mu$之指數分佈 。令$N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0$ 。試證$N = \{N(t), t \geq 0\}$為一Poisson 過程, 並決定其到達間距之分佈 。

5. 設有一參數分別為λ及μ之$M/M/\infty$等待系統 。令$X(t)$表於時間t正被服務之顧客數, $t \geq 0$ 。試求$t \to \infty$時, $X(t)$之極限分佈 。