

九十四學年度第一學期 數理統計(一) 測驗二

考試日期: 95年1月16日 教師: 黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, $n \geq 2$ 。
 - (i) 設 σ^2 已知, 而 μ 未知, 試求 μ 之一 UMVUE;
 - (ii) 設 μ 已知, 而 σ^2 未知, 試求 σ^2 之一 UMVUE;
 - (iii) 設 μ 已知, 而 σ^2 未知, 試求 σ 之一 UMVUE;
 - (iv) 設 $\sigma = 1$, 試求 $\theta = P(X_1 \geq 0)$ 之一 UMVUE。
2. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\mu \in R, \sigma > 0, n \geq 2$ 。
 - (i) 設 $k > -(n - 1)$, 試證 $E(S_n^k) = a(n, k)\sigma^k$, 並給出 $a(n, k)$;
 - (ii) 當 μ, σ^2 皆為未知, 試利用(i)得到 $\mu\sigma^k$ 之一 UMVUE, 其中 $k > -(n - 1)$ 。
3. 設 X_1, \dots, X_{n+1} 為一組由 $Ber(p)$ 分佈所產生之隨機樣本, $0 < p < 1$ 。令 $\theta = P(\sum_{i=1}^n X_i > X_{n+1})$ 。
 - (i) 試證 $T(X_1, \dots, X_{n+1}) = I_{\{\sum_{i=1}^n X_i > X_{n+1}\}}$ 為 θ 之一不偏估計量;
 - (ii) 試求 θ 之一 UMVUE。
4. 設 X 與 Y 獨立, 皆有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈。試求參數為(i) μ , (ii) σ^2 時, $X - Y$ 之資訊數。
5. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\Gamma(\alpha, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, α 為已知, $\theta > 0$ 。
 - (i) 試證 $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i / (n\alpha)$ 為 $q(\theta) = \theta$ 之一 UMVUE, 且其變異數達到 CRLB;
 - (ii) 設 $n\alpha > 2$, 試求 $q(\theta) = 1/\theta$ 之一 UMVUE, 並判斷其變異數是否達到 CRLB。