

九十四學年度第一學期 數理統計(一) 測驗一

考試日期: 94年11月14日 教師: 黃文璋

第1-4題各15分, 5-6題各20分。須附上適當的步驟。

1. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 p.d.f. $f(x|\theta)$ 所產生之隨機樣本, 其中 $\theta = (\mu, \sigma)$, $\mu \in R$, $\sigma > 0$ 。

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma}, & x \geq \mu, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

- (i) 若 μ, σ 皆未知, 試求 θ 之一最小充分統計量; (ii) 若 σ 已知, 試求 μ 之一最小充分統計量;
(iii) 若 μ 已知, 試求 σ 之一最小充分統計量。

2. 設 X_1, \dots, X_n 為獨立的隨機變數, 且 X_k 有波松分佈, 參數為 $(\alpha/k)(n/(n + \beta))^k$, $1 \leq k \leq n$ 。試求 (α, β) 之一最小充分統計量。

3. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由在區域 S 上均勻分佈所產生之隨機樣本, 其中 $S = [-3, -1] \cup [0, \theta]$, $\theta \geq 0$ 。試求

- (i) θ 之 MLE; (ii) θ 之 MLE, 若只有非負的 X_i 's 能觀測到;
(iii) θ 之 MLE, 若只知非負的 X_i 's 之個數 T 。

4. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由分佈函數 $F(x|\alpha, \beta)$ 所產生之隨機樣本, 其中

$$F(x|\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ (x/\beta)^\alpha, & 0 < x \leq \beta, \\ 1, & x > \beta, \end{cases}$$

$\alpha, \beta > 0$ 。試求

- (i) (α, β) 之一個二維的充分統計量; (ii) α, β 之 MLE。

5. 設 X 之 p.d.f. 為 $f(1|\theta) = 1/8$, $f(2|\theta) = 3/8$, $f(3|\theta) = f(4|\theta) = (1+\theta)/8$, $f(5|\theta) = f(6|\theta) = (1-\theta)/8$, $\theta \in [0, 1]$ 。試求 (i) θ 之一最小充分統計量 T ; (ii) θ 之 MLE $\hat{\theta}$ 。

6. 設 X 有 $\mathcal{U}(0, \theta)$ 分佈, θ 之事前分佈為 $\mathcal{E}(1)$ 。試求

- (i) 在給定 $X = x$ 之下, θ 之事後分佈; (ii) θ 之貝氏估計量。