九十三學年度第二學期　機率與統計(二)　測驗二

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 94年6月21日　　教師: 黃文璋

第1-5題各15分, 第6題25分 。須附上適當的步驟 。

1. 設X_1, X_2, X_3相互獨立且分別有$\mathcal{P}(\lambda_1)$, $\mathcal{P}(\lambda_2)$, $\mathcal{P}(\lambda_3)$分佈 。令$Y = X_1 + X_2 + X_3$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 。對任一正整數n, 試證$X_1, X_2, X_3 | Y = n$有$\mathcal{M}(n, \lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda, \lambda_3/\lambda)$分佈 。

2. 設X, Y為二獨立的隨機變數, 且皆有$\mathcal{N}(0,1)$分佈 。又令$Z = \min\{X, Y\}$ 。試證Z^2有 χ^2_1分佈, 即$Z^2 \stackrel{d}{=} X^2$ 。

3. 設Z, V_1及V_2相互獨立, 且$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $V_1 \sim \chi^2_5$, $V_2 \sim \chi^2_9$ 。試求(i) $P(Z/\sqrt{V_1/5} \le 2.015)$; (ii) $P(Z > 0.611\sqrt{V_2})$; (iii) $P(V_1/V_2 \le 1.450)$ 。

4. 設(X_1, X_2, X_3, X_4)之聯合p.d.f.為$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 24e^{-x_1-x_2-x_3-x_4}$, $0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 。令$U_1 = X_1, U_2 = X_2 - X_1, U_3 = X_3 - X_2, U_4 = X_4 - X_3$ 。(i) 試求(U_1, U_2, U_3, U_4)之聯合p.d.f. g; (ii)試驗證(i)中之g為一p.d.f.; (iii) 試求$P(U_1 > 3, U_2 > 4)$ 。

5. 設$X_1, \cdots, X_6$為一組由$\mathcal{U}(0,1)$分佈所產生之隨機樣本, (i) 令$R = X_{(6)} - X_{(1)}$, 試求$P(R > 1/4)$; (2) 令$V = X_{(1)}$, 試求$P(V < 1/2)$; (iii) 試求$(X_{(2)}, X_{(5)})$之p.d.f. 。

6. 設$X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \cdots, n$, $Z_j \sim \mathcal{N}(0,1)$, $j = 1, \cdots, m$, 且這些隨機變數相互獨立 。又令$\overline{X}$, $\overline{Z}$分別表$\{X_i\}$及$\{Z_j\}$之樣本平均, S_Z表$\{Z_j\}$之樣本標準差 。對下述隨機變數, 若為常見分佈則給出其分佈, 否則以不知回答 。

   (i) $X_1 - X_2$, (ii) $X_2 + 2X_3$, (iii) $(X_1 - X_2)/(\sigma S_Z\sqrt{2})$, (iv) $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/(\sigma S_Z)$, (v) $Z_1^2 + Z_2^2$, (vi) $Z_1^2 - Z_2^2$, (vii) $Z_1/\sqrt{Z_2^2}$, (viii) Z_1^2/Z_2^2, (ix) $\overline{X}/\overline{Z}$, (x) $\sqrt{nm}(\overline{X} - \mu)/(\sigma(\sum_{j=1}^m Z_j^2)^{1/2})$ 。