九十三學年度第二學期　機率與統計(二)　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 94年4月25日　　教師: 黃文璋

第1-4題各10分, 第5-8題各15分 。須附上適當的步驟 。

1. 設(X,Y)之聯合p.d.f.為$f(x,y)=2x, 0\le x,y\le 1$ 。試求$P(X^2<Y<X)$ 。
2. 設X,Y為二獨立的隨機變數, 且分別有$\mathcal{P}(\lambda)$及$\mathcal{P}(\mu)$分佈 。試求給定$X+Y=n$之下, $n\ge 1$, X之條件p.d.f. 。並指出此為那一常見的分佈, 參數為何 。
3. 設$X|P=p\sim \mathcal{B}er(p)$, $P\sim \mathcal{B}e(\alpha,\beta)$ 。試求X之非條件分佈, 並指出此為那一常見分佈, 參數為何?
4. 設$(X,Y)\sim \mathcal{N}(1,2,4,9,0.5)$, 試決定(i)$(X+3Y, 2X-3Y)$, (ii) $2X-Y$之分佈 。
5. 設X與Y獨立, 且$X\sim\Gamma(p,\lambda)$, $Y\sim\Gamma(q,\lambda)$ 。試求(i) $E(XY)$, (ii) $\mathrm{Var}(XY)$, (iii) $U=Y/X$之分佈 。
6. 設X,Y之聯合p.d.f.為$f(x,y)=p^2(1-p)^y$, $x,y=0,1,2,\cdots$, 且$x\le y$, 其中$0<p<1$ 。

   (i) 試證X,Y之邊際分佈, 分別為自0開始之$\mathcal{NB}(1,p)$及$\mathcal{NB}(2,p)$分佈;

   (ii) 試求$\mathrm{Cov}(X,Y)$及$\rho(X,Y)$, 並問X與Y是否獨立?
7. 設(X,Y)之聯合p.d.f.為$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}(1+xye^{-(x^2+y^2-2)/2})$, $x,y\in R$ 。試證 (i) $f(x,y)\ge 0, \forall x,y\in R$, 且確為一二變數之p.d.f.; (ii) X,Y皆以$\mathcal{N}(0,1)$為邊際p.d.f. 。
8. 設X,Y,Z之聯合p.d.f.為$f(x,y,z)=(x+2y+z)/2, x,y,z\in(0,1)$ 。試求 (i) $f_{X|Y,Z}(x|1/2,1/2)$; (ii) $f_{X,Y|Z}(x,y|1/2)$; (iii) $P(X<1/4|Y=1/2,Z=1/2)$; (iv) $E(X^2|Z=1/2)$ 。