九十三學年度第二學期　機率論(二)　測驗二

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 94年5月25日　　教師: 黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 設$f(z) = 2\phi(z)\Phi(\lambda z)$, $z \in R$, $\lambda > 0$為一常數, 其中$\phi(z)$, $\Phi(z)$分別為$\mathcal{N}(0,1)$分佈之p.d.f.及分佈函數。(i) 試證$f(z)$為一p.d.f.。(ii) 設隨機變數Z以$f(z)$為p.d.f.。試證$Z^2 \sim \chi_1^2$。

2. 設X_n有$\mathcal{NB}(r_n, \theta_n)$分佈，又$n \to \infty$時, $\theta_n \to 1$, $r_n \to \infty$, 且$\lim_{n\to\infty} r_n(1-\theta_n) = \lambda$。試求$n \to \infty$時, X_n之極限分佈。

3. 設$X_1, \cdots, X_n$為i.i.d.以$\mathcal{U}(0,1)$為共同分佈。令$X_{(1)} \le \cdots \le X_{(n)}$表順序統計量, 試證$\dfrac{X_{(2)}}{X_{(1)}}$, $\dfrac{X_{(3)}}{X_{(2)}}, \cdots, \dfrac{X_{(n)}}{X_{(n-1)}}$, $X_{(n)}$相互獨立。

4. 設 X, Y為二 i.i.d.之 $\mathcal{E}(\lambda)$ r.v.'s。令$Z = \min\{X, Y\}$, 且 $W = 1$, 當$Z = X$, $W = 0$, 當$Z = Y$。(i) 試求 Z, W之聯合分佈; (ii) 試證 Z與 W獨立。

5. 設將 r個球隨機地放進 n個盒子中。令 A_i表第 i個盒子為空盒之事件, N_n表總共之空盒數。試證

   (i) $P(A_i) = (1-1/n)^r, E(N_n) = n(1-1/n)^r, \mathrm{Var}(N_n) = n(n-1)((1-2/n)^r - (1-1/n)^{2r}) + n((1-1/n)^r - (1-1/n)^{2r})$;

   (ii) 若 r與 n有關, 且 $n \to \infty$時, $r/n \to c$, 則 $n \to \infty$時, $E(N_n/n) \to e^{-c}$, $N_n/n \xrightarrow{P} e^{-c}$。