九十三學年度第二學期　機率論(二)　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 94年4月13日　　教師: 黃文璋

第1題10分, 第2-7題各15分。須附上適當的步驟。

1. 設$X_n = 1 + Y_n$, $n \geq 1$, 其中$\{Y_n, n \geq 1\}$為i.i.d.之$\Gamma(\alpha, \beta)$分佈。試證$X_{(1)} \xrightarrow[n \to \infty]{P} a$, 並給出$a$。
2. 試利用中央極限定理在一組適當的 Poisson r.v.'s上, 以證明$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} n^k/k! = 1/2$。
3. 設$\{X_n, n \geq 1\}$為每對無相關之r.v.'s, 且$P(X_n = -\alpha^n) = P(X_n = \alpha^n) = 1/2$, $n \geq 1$, 其中$0 < \alpha \leq 1$為一常數。試證$\overline{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} a$, 並給出$a$。
4. 設$\{X_n, n \geq 1\}$為一數列之$\mathcal{B}er(p)$r.v.'s, $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$, $n \geq 1$。試分別利用Chebyshev不等式及中央極限定理, 找出最小的n_0, 使得$n \geq n_0$時, $P(|\overline{X}_n - p| \leq 0.01) \geq 0.95$。
5. 設$\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$為Ω上所有Borel集合之集合, 且令$P([0, a]) = a$, $\forall a \in \Omega$。令$X_n = I_{A_n}$, 其中$A_n = [1/2, 2/3 + 3/n]$, $n \geq 1$, 又令$X = I_A$, 其中$A = [0, 1/6]$。試證$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} X$, 但$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} X$。
6. 取$(\Omega, \mathcal{F}, P)$如題5, 令$X_n(\omega) = I_{[0, n^{-1/2}]}(\omega) + e^{\omega^n}$, $\omega \in \Omega$, $n \geq 1$。試給出r.v.X, 使得$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{a.s.} X$, 並證明此收斂。
7. A, B二人各投擲一出現正面機率為0.6及0.4之銅板n次, 誰得到較多正面便獲勝。試估計當(i) $n = 30$, (ii) $n = 100$時, A獲勝之機率。