九十三學年度第一學期　機率與統計(一)　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 93年11月15日　　教師: 黃文璋

第1-4題各15分, 第5-6題各20分。須附上適當的步驟。

1. 設一家庭中有k個小孩。令事件A表此家庭中有男孩及女孩, B表最多有一女孩。試對$k = 2, 3, 4$, 討論A與B是否獨立。

2. 設隨機變數X之p.d.f.如下。(i) 試決定常數c。(ii) 試求$E(X)$及(iii) $\mathrm{Var}(X)$。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \le -1, \\ -cx & , -1 < x \le 0, \\ ce^{-6x} & , x > 0, \end{cases}$$

3. 設隨機變數X有$\mathcal{U}[-1, 1]$分佈。令$Y = X^2$。試求

   (i) $P(-0.5 < X < 2)$,　(ii) $E(X)$,　(iii) $\mathrm{Var}(X)$,　(iv) $E(X^5 - 3X^3 + 6X)$,

   (v) Y之p.d.f.及分佈函數。

4. 設隨機變數X有$\mathcal{C}(0, 1)$分佈。

   (i) 試寫出其p.d.f. $f(x)$, $x \in R$, 並繪$y = f(x)$之圖形, 且給出漸近線、極值及反曲點。

   (ii) 試求$P(X > 1)$及$P(|X| < 1)$之值。

   (iii) 試求$E(X^{\frac{1}{2}})$。

5. 設$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 已知$\Omega$上一$\sigma$-體包含三元素$\{1\}$, $\{1, 2\}$, 及$\{3, 4, 5\}$。

   (i) 試寫出最小的這種σ-體$\mathcal{F}$。(6分)

   (ii) 試在$\mathcal{F}$上定義一機率函數, 且滿足$P(\{1\}) = 0.1$, $P(\{1, 2\}) = 0.4$。(6分)

   (iii) 令$P(\{1\}) = a$, $P(\{1, 2\}) = b$。試決定(a, b), 使得$\{1\}$與$\{1, 2\}$二事件獨立。(8分)

6. 設隨機變數X有$\mathcal{N}(0, 1)$分佈。試求

   (i) $E(X)$,　(ii) $E(X^2)$,　(iii) $E(X^3)$,　(iv) $E(X^4)$,　(v) $E((X - 1)^4)$。