# 九十三學年度第一學期　機率論(一)　測驗二

## 題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 94年1月20日　　教師: 黃文璋

第1-4題各15分, 第5-6題各20分。須附上適當的步驟。

1. 設r.v.$X$滿足$E(X^2) < \infty$, 問$\mathrm{Var}([X]) \leq \mathrm{Var}(X)$是否必成立? 此處$[x]$表小於或等於$x$之最大整數。

2. 令$Y = X_1 + \cdots + X_{10}$, 設給定$Y = k$, $X_1, \cdots, X_{10}$有$\mathcal{M}(k, p_1, p_2, \cdots, p_{10})$, 其中$p_i > 0$, $i = 1, \cdots, 10$, 且$\sum_{i=1}^{10} p_i = 1$。又設$Y$有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈, $\lambda > 0$。求$X_1, \cdots, X_{10}$之非條件分佈, 且證明$X_1, \cdots, X_{10}$相互獨立。

3. 設$X$與$Y$獨立, 分別有$\Gamma(p, \lambda)$及$\Gamma(q, \lambda)$分佈。求$E(X|X+Y)$及$\mathrm{Var}(X|X+Y)$。

4. 設$\{X_n, n \geq 1\}$為i.i.d.之r.v.'s, 以$\mathcal{B}(k, p)$為其共同分佈, $k \geq 1$, $0 < p < 1$。令$Y_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$。問$n \to \infty$時, $Y_n$是否會機率收斂至某一r.v.$Z$, 證明或否證之。

5. 有四人分別投擲一公正的銅板。若其中一人投擲出與其他三人相異的面, 他便從其他三人各取1元; 若四人投擲出相同的面, 則須重投直至分出結果, 如此一局方結束。令$X_i$表在某一局中第$i$個人之所得, $i = 1, 2, 3, 4$。求$E(X_1)$, $E(X_1X_2)$, $E(X_1X_2X_3)$及$E(X_1X_2X_3X_4)$。次令$N$表在某一局中, 四人各要投擲的次數, 求$N$之分佈。

6. 設$X, Y$為i.i.d.之$\mathcal{U}(0, 1)$r.v.'s。分別依下述二法求$X/Y$之p.d.f.: (i) 利用變數代換, (ii) 利用條件機率先求分佈函數。