九十二學年度第二學期　隨機過程　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 93年4月20日　　教師: 黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 設一Markov鏈有r個狀態, 試證若狀態j可達到狀態k, 則必可在$r-1$步或之前到達。

2. 設一Markov鏈之狀態空間爲$S = \{0,1,2,3,4,5\}$, 推移機率矩陣爲P。將S分類, 並求平穩分佈。

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

3. 設一不可約的Markov鏈, 狀態空間爲S, 且推移機率矩陣滿足$P^2 = P$。試證$p_{ij} = p_{ji}$, $\forall i,j \in S$, 且此Markov鏈爲單周期。

4. 考慮一純死亡過程$\{X(t), t \geq 0\}$, $X(0) = i$, 且死亡率$\mu_n = n\mu$, $\mu \geq 1$。試證(i) $p_i(t) = e^{-i\mu t}$, (ii) $p_n(t) = \binom{i}{n} e^{-n\mu t}(1-e^{-\mu t})^{i-n}$, $n = i, i-1, \cdots, 1, 0$。試求(iii) $E(X(t))$, (iv) $\mathrm{Var}(X(t))$。

5. 設有一生與死過程$\{X(t), t \geq 0\}$, 出生率$\lambda_n = n\lambda + a$, 死亡率爲$\mu_n = n\mu$, $n \geq 0$, 其中$\lambda, \mu, a > 0$。又設$X(0) = i$。

   (i) 試導出向前Kolmogorov微分方程式。

   (ii) 設$a = 0$, 令$G(z,t) = \sum_{j=i}^{\infty} p_{ij}(t) z^j$, $|z| \leq 1$。試證

$$G(z,t) = \begin{cases} \left(\frac{\mu(1-z)-(\mu-\lambda z)e^{-(\lambda-\mu)t}}{\lambda(1-z)-(\mu-\lambda z)e^{-(\lambda-\mu)t}}\right)^i & , \lambda \neq \mu, \\ \left(\frac{1+(1-z)(\lambda t-1)}{1+(1-z)\lambda t}\right)^i & , \lambda = \mu。 \end{cases}$$