# 九十二學年度第二學期　機率論(二)　測驗二

## 題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 93年5月17日　　教師: 黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 設$\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$爲$[0,1]$之Borel集合的集合, 且令$P(\omega \in [0,a]) = a$, $\forall a \in \Omega$。令$X_n(\omega) = I_{[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]}(\omega) + e^{\omega^n}, \omega \in \Omega, Y_n(\omega) = nI_{[0,\frac{1}{\sqrt{n}}]}(\omega), \omega \in \Omega$。(i) 試給出r.v. $X$, 使得$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} X$, 並證明此收斂。(ii) 試給出r.v. $Y$, 使得$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} Y$, 證明此收斂, 並找出使$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} Y$之正數$p$的集合。

2. 設$(\Omega, \mathcal{F}, P)$如題1。令$A_n = [0, \frac{1}{n})$, $B_n = [\frac{n}{2n+1}, 1]$。

   (i) 試證$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, 但$P(A_n, \text{i.o.}) = 0$。

   (ii)試求$P(B_n, \text{i.o.})$。

3. 設$X_n$有$\mathcal{U}[1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n]$分佈, 且$X = 1/2$, a.s.。試證$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$, 並問此與$F_{X_n}(1/2) = 1/2, \forall n \geq 1$, 且$F_X(1/2) = 1$, 是否有矛盾。

4. 設$\Omega = [0,1), \mathcal{F}$及$P$定義如題1。又定義r.v.'s $\{X_n, n \geq 1\}$如下:

$$X_{N^2+j}(\omega) = \begin{cases} N & \text{,若} j/(2N+1) \leq \omega < (j+1)/(2N+1), \\ 0 & \text{,其他}, \end{cases}$$

   其中$j = 0, 1, \cdots, 2N, N \geq 1$。試證

   (i) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$;

   (ii) 對$\forall\ \omega \in \Omega, n \to \infty$ 時$X_n(\omega)$不收斂;

   (iii) 對$\forall\ \omega \in (0,1), n \to \infty$ 時$X_{n^2}(\omega) \to 0$;

   (iv) 當$n \to \infty$ 時, $E(X_n)$ 不趨近至0。

5. 我爲什麼要讀研究所(300字以上)。