九十二學年度第二學期　機率論(二)　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 93年4月5日　　教師: 黃文璋

1-5題每題16分, 第6題20分。須附上適當的步驟。

1. 設$X_n, n \geq 1$, 爲i.i.d.之隨機變數, 皆有自1開始之$\mathcal{G}e(\theta)$分佈, $0 < \theta < 1$。令$S = X_1 + \cdots + X_N$, 其中N有自1開始之$\mathcal{G}e(p)$分佈, $0 < p < 1$。試求S之分佈, 指出此爲那一常見分佈, 並給出參數。

2. (i) 設X有$\Gamma(\alpha, \beta)$分佈, 試求X之Laplace 轉換$\phi(s)$。

   (ii) 利用(i)中之$\phi(s)$求$E(X^3)$。

3. 設r.v.X_n有$\mathcal{NB}(n, \theta)$分佈(自0開始), $n \geq 1$, 其中$0 < \theta < 1$。

   (i) 試找出a使得$X_n/n \xrightarrow[n \to \infty]{p} a$, 並證明之。

   (ii) 試利用中央極限定理估計n很大時$P(X_n \leq x)$之值, $x \in R$。

4. 設$X_n, n \geq 1$, 爲獨立, 且$P(X_n = \sqrt{n}) = P(X_n = -\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2}$, $n \geq 1$。令$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$。試檢驗是否存在適當的η_n及τ_n, $n \geq 1$, 使得$(S_n - \eta_n)/\tau_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$。

5. 設$X_n, n \geq 1$, 爲獨立且$P(X_n = (\dfrac{1}{2})^n) = P(X_n = -(\dfrac{1}{2})^n) = \dfrac{1}{2}$, $n \geq 1$。令$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$。試檢驗是否存在適當的η_n及τ_n, $n \geq 1$, 使得$(S_n - \eta_n)/\tau_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$。

6. 設X_1, X_2, X_3爲i.i.d.之非負隨機變數, U與X_1, X_2獨立, 且有$\mathcal{U}(0, 1)$分佈。若$X_1 \stackrel{d}{=} U(X_2 + X_3)$。試求$X_1$之分佈。