九十二學年度第一學期　機率論(一)　測驗二

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 93年1月12日　　教師: 黃文璋

1-4題各15分, 5-6題各20分。須附上適當的步驟。

1. 設X, Y之聯合p.d.f.爲$f(x,y) = \dfrac{1}{\pi}, x^2+y^2 \le 1$。令$V = (X^2+Y^2)^{1/2}, U = \tan^{-1}(Y/X)$。試求$V, U$之聯合p.d.f.$g(v,u)$, 並驗證此確爲一p.d.f.。
2. 設X有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈。試求(i) $E(X^2)$, (ii) $E(\dfrac{1}{1+X})$。
3. 設Λ有$\Gamma(a,\mu)$分佈, a爲一正整數, $\mu > 0$。且設給定$\Lambda = \lambda$, X有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈。試證X之非條件分佈爲負二項分佈, 並給出參數。
4. 設$f(x,y) = 6xy^2$, $0 < x, y < 1$。(i) 試求$E(X|Y=y)$, (ii) 試求$\mathrm{Var}(X|Y=y)$。(iii) 試驗證$E(E(X|Y)) = E(X)$。
5. 設N有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈, $\lambda > 0$, 且設給定$N = n$, X有$\mathcal{B}(n,p)$分佈(若$n = 0$, X當然亦爲0)。試求X之非條件分佈, 指出此爲那一常見分佈, 並給出參數。
6. 設X與Y獨立, 皆有$\mathcal{E}(\lambda)$分佈。令$Z = X(1+Y)$。試求

   (i) $E(Z|Y=y)$, (ii) $E(E(Z|Y))$, (iii) $\mathrm{Var}(E(Z|Y))$, (iv) $\mathrm{Var}(Z|X=x)$, (v) $E(\mathrm{Var}(Z|X))$, (vi) $\mathrm{Var}(E(Z|X)) + E(\mathrm{Var}(Z|X))$。