九十二學年度第一學期　機率論(一)　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 92年11月10日　　教師: 黃文璋

1-4題各15分, 5-6題各20分。須附上適當的步驟。

1. 設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2,3\}$, $A_3 = \{4,5,6,7,8\}$。試寫出包含A_1, A_2, A_3之最小的σ-體$\mathcal{F}$, 並在$\mathcal{F}$上定義一機率測度P。

2. 設$\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F}$表Ω之所有子集合之集合。機率函數滿足$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = 1/4$。令$X(1) = X(2) = 0$, $X(3) = X(4) = 1$, $Y(1) = Y(3) = 2$, $Y(2) = Y(4) = 3$。試證X與Y獨立。

3. 設$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F}$表Ω之所有子集合之集合, $P(\{w\}) = 1/6$, $w \in R$。試判斷可否在$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上定義一有二項分佈之隨機變數? 若"否"則證明; 若"可"則將所有隨機變數及伴隨的二項分佈皆給出。

4. 試證機率測度有由下連續的性質。

5. 設$X_1, \cdots, X_n$爲i.i.d.之$\mathcal{U}(0,1)$ r.v.'s。令$R = X_{(n)} - X_{(1)}$。試求R之p.d.f.。

6. 設r.v.X之p.d.f.爲$f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$, $x \in R$。

   (i) 試證$f(x)$確實爲一p.d.f.。(ii) 試求$P(-3 < X < 3)$。

   (iii) 令

$$Y = \begin{cases} X & \text{, 若} -t_0 < X < t_0, \\ t_0 & \text{, 若} X \geq t_0, \\ -t_0 & \text{, 若} X \leq -t_0, \end{cases}$$

   其中$t_0 > 0$爲一常數。試給出Y之分佈函數F。

   (iv) 試將(iii)中之F寫成$F(x) = \alpha F_d(x) + (1-\alpha)F_c(x)$, $x \in R$, 其中F_d及F_c皆爲d.f.'s, F_d爲一階梯函數, F_c爲連續函數, $0 \leq \alpha \leq 1$爲一常數。