九十一學年度第一學期　數理統計(一)　測驗二

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 92年1月15日　　教師: 黃文璋

每題20分。須附上適當的步驟。

1. 設$X_1, \cdots, X_n$爲一組由$\mathcal{N}(\theta, \theta)$分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$。(i) θ之完備充分統計量是否存在? (ii) $\overline{X}_n$是否爲θ之UMVUE?

2. 設$X_1, \cdots, X_n$爲一組由$\mathcal{U}[0, \theta]$分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 3$。令$U_n = \{X_1, \cdots, X_n\}$中小於或等於3之個數。(i) 試求$E(U_n)$, (ii) 試證$T_n = 3n/U_n$爲$\theta$之一致估計量。

3. 設$X_1, \cdots, X_n$爲一組由$\Gamma(2, \theta)$分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$, $n \geq 2$。試求$q(\theta) = 2\theta^{-2} + 3\theta^2$之一UMVUE。

4. 設$X_1, \cdots, X_n$爲一組由$\Gamma(\alpha, \theta)$分佈所產生之隨機樣本, α爲已知, $\theta > 0$。令$\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$。(i) 試證$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i/(n\alpha)$爲$q(\theta) = \theta$之一UMVUE, 且其變異數達到CRLB;

   (ii) 設$n\alpha > 2$, 試求$q(\theta) = 1/\theta$之一UMVUE, 並判斷其變異數是否達到CRLB。

5. 設$X_1, \cdots, X_n$爲一組由$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$分佈所產生之隨機樣本, $\mu \in R$, $\sigma > 0$。

   (i) 設$k > -(n-1)$, 試證$E(S_n^k) = a\sigma^k$, 其中a爲一n, k之函數, S_n爲樣本變異數;

   (ii) 當μ, σ^2皆未知, 試利用(i)得到$\mu\sigma^k$之一UMVUE, 其中$k > -(n-1)$。