九十一學年度第一學期　物理系　微積分　測驗二

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 91年12月10日　　教師: 黃文璋

1-8題各10分, 第9題20分, 須附上適當的步驟。

1. 設f爲一在$[a,b]$上之連續函數, $a<b$, 且$f(a)\le a, f(b)\ge b$。試證存在一$c\in(a,b)$, 使得$f(c)=c$。

2. 設$f(x)=\begin{cases} x^3+\sin x & ,x\ge 0 \\ 2\cos x+x^2-2 & ,x<0 \end{cases}$。試求$f'(x)$, $x\in R$, 並指出函數f'之連續處。

3. 方程式$3x^2+4y^2=12$定義出y爲二x之隱函數, 其中$|x|\le 2$。設y''存在, 試證$4y^3y''=-9$。

4. 求連續函數f及常數c, 使得

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 t^2f(t)dt+\frac{1}{8}x^{16}+\frac{1}{9}x^{18}+c\text{。}$$

5. 設$f'(x)$在$x\ge 1$處連續, $a>1$爲一常數, $[\cdot]$表最大整數函數。試證$\int_1^a[x]f'(x)dx=[a]f(a)-(f(1)+\cdots+f([a]))$。

6. 令$f(x)=x^4\sin(1/x)$, $x\ne 0$, $f(0)=0$。試求$f'(x)$, 並指出其連續處。

7. 試證$x^2=x\sin x+\cos x$恰有二實根。

8. 設$n\ne 1, a, b\ne 0$。試證

$$\int\frac{1}{x^n\sqrt{ax+b}}dx=-\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}}-\frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\frac{1}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}dx\text{。}$$

9. 試繪$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}$, $x\in R$之圖形, 並指出漸近線、極值及反曲點(若求不出精確值, 可指出在那整數區間)。