九十學年度第二學期　機率與統計(二)　測驗二

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 91年6月24日　　教師: 黃文璋

第1-4題各15分, 第5-6題各20分。須附上適當的步驟。

1. 設有一組樣本數爲100之隨機樣本, 期望值爲μ, 變異數爲σ^2, 試估計$\overline{X}_{100}$與μ差異不超過$\sigma/10$之機率, 並以$\mathcal{N}(0,1)$分佈函數$\Phi(x)$表之。

2. 設$X_1,\cdots,X_6$爲自$\mathcal{U}(0,1)$分佈所產生之隨機樣本。令$R = X_{(6)} - X_{(1)}$。試求$P(R > 1/2)$及$E(R)$。

3. 設$X_i \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $i = 1,\cdots,n$, $Z_j \sim \mathcal{N}(0,1)$, $j = 1,\cdots,m$, 且這些隨機變數相互獨立。又令$\overline{X}$, $\overline{Z}$分別表$\{X_i\}$及$\{Z_j\}$之樣本平均, S_Z表$\{Z_j\}$之樣本標準差。對下述隨機變數, 若爲常見分佈則給出其分佈, 否則以不知回答。(i) $X_1 - X_2$,　(ii) Z_1^2/Z_2^2,
(iii) $(X_1 - X_2)/(\sigma S_Z\sqrt{2})$,　(iv) $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/(\sigma S_Z)$,　(v) $\sqrt{nm}(\overline{X}-\mu)/(\sigma(\sum_{j=1}^m Z_j^2)^{1/2})$。

4. 設$X_1,\cdots,X_n$爲由$\mathcal{E}(\lambda)$分佈所產生之隨機樣本, 令$Y_n = X_{(1)}$。試證$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} 0$。

5. 設$X_1,\cdots,X_n$爲由$\mathcal{B}e(\alpha,\beta)$分佈所產生之隨機樣本。對下述各情況求最小充分統計量。
(i) α,β皆未知,　(ii) α已知,　(iii) β已知,　(iv) $\beta = \alpha$。

6. 設$X_1,\cdots,X_n$爲由$\mathcal{E}(\theta)$分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$。試分別以下述三法, 判定$T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$爲$\theta$之一充分統計量。(i) 分解定理。　(ii) 關於指數族分佈的定理。
(iii) 試證$X_1,\cdots,X_n|T = t$之p.d.f.爲$f(x_1,\cdots,x_n|t) = \dfrac{(n-1)!}{t^{n-1}}$,　$\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = t$。