九十學年度第二學期　機率與統計(二)　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 91年4月22日　　教師: 黃文璋

第1-4題各15分, 第5-6題各20分。須附上適當的步驟。

1. 某投資者欲得到每週投資報酬率之期望值μ的資訊。若知投資報酬率之變異數不超過0.0004, 則須觀測至少多少週, 才能獲得對μ之估計誤差小於0.005之機率至少爲0.8。

2. 設X, Y, Z之聯合p.d.f.爲$f(x, y, z) = 0.25$, $(x, y, z) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$。

   (i) 試求$f_{X,Y}, f_{X,Z}, f_{Y,Z}$, 並證明$X$與$Y$, X與Z, Y與Z皆每對獨立。

   (ii) 試證X, Y, Z不相互獨立。　(iii) 試求$f_{X|Y}(x|1)$。

3. 設$(X, Y) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$。令$Z_1 = (X - \mu_1)/\sigma_1$, $Z_2 = (Y - \mu_2)/\sigma_2$, $U_1 = Z_1 + Z_2$, $U_2 = Z_1 - Z_2$。試決定(i)Z_1, Z_2之聯合分佈, (ii) Z_1, Z_2之邊際分佈, (iii) $\mathrm{Cov}(U_1, U_2)$。

4. 設X與Y獨立, 且分別有$\Gamma(p, \lambda)$及$\Gamma(q, \lambda)$分佈。試求Y/X之分佈。

5. 設X與Y之聯合p.d.f.爲$f(x, y) = 4(x - xy)$, $0 < x, y < 1$。試求$E(X)$, $E(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$, $\rho(X, Y)$, $\mathrm{Cov}(X + Y, X + 2Y)$, $\mathrm{Cov}(2X + Y, 3X - Y)$。

6. 設1至n中隨機地取r個數字, $r \le n$, 每次取出後不放回, 而得$X_1, \cdots, X_r$, 令$\overline{X}_r = (X_1 + \cdots + X_r)/r$。利用$X_1, \cdots, X_r$之邊際分佈相同, 試證$E(\overline{X}_r) = (n + 1)/2$, $\mathrm{Var}(\overline{X}_r) = (n + 1)(n - r)/(12r)$。