九十學年度第一學期　機率與統計(一)　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 90年12月3日　　教師: 黃文璋

第1-7題各12分, 第8題16分。須附上適當的步驟。

1. 設$\Omega = \{1,2,3,4\}$, 已知Ω上一$\sigma-$體中有二元素$\{1\}$及$\{1,2\}$。試寫出最小的這種$\sigma-$體$\mathcal{F}$, 並在$\mathcal{F}$上定義一機率函數, 滿足$P(\{1\}) = 0.1$, $P(\{1,2\}) = 0.3$。
2. 設隨機變數X之機率密度函數爲$f(x) = c(\frac{1}{2})^x$, $x = 1,2,3,4,5$。

   (i) 試決定常數c,　(ii) 試求X之分佈函數$F(x)$,　(iii) 試求$P(3.3 \le X \le 7.7)$。
3. 設隨機變數X有$\mathcal{E}(1)$分佈, 令$Y = e^X$。

   (i) 試決定Y之p.d.f.及分佈函數,　(ii) 試求$E(Y)$及$E(Y^{\frac{1}{2}})$。
4. 設隨機變數X之分佈函數爲$F(x) = 1 - e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$, $F(x) = 0$, $x \le 0$。

   (i) 試證$F(x)$確爲一分佈函數,　(ii) 試求X之p.d.f.,　(iii) 試證$F(X)$有$\mathcal{U}(0,1)$分佈。
5. 設隨機變數X之p.d.f.爲$f(x) = (e^2+1)^{-1}xe^x$, $0 \le x \le 2$。

   (i) 試證$f(x)$確爲一p.d.f.,　(ii) 試求X之動差母函數。
6. 設X有$\mathcal{B}(n,p)$分佈, $0 < p < 1$。(i) 試求X之拉普拉斯轉換$\phi(s)$, $s \ge 0$,　(ii)試求$E(X)$及$\mathrm{Var}(X)$。
7. 設X有$\mathcal{U}(0,1)$分佈。令$Y = \log(\frac{X}{1-X})$。(i) 試求Y之p.d.f.,　(ii) 試求$E(Y)$。
8. 重覆進行一試驗, 每次將10個球隨機地放進10個袋中。

   (i) 試求每次會得到兩個空袋之機率p, 並以a表之, 其中a爲每袋中恰有一球之機率。

   (ii) 平均共要做幾次試驗, 才會得到三次有兩個空袋(以p表之)?