九十學年度第一學期　電機系　微積分　測驗一

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 90年11月14日　　教師: 黃文璋

每題10分, 須附上適當的步驟及必要之說明

1. 試看出 $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{n}}{2+\sqrt[3]{n}}$ 之值, 並依定義證明之。
2. 令 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$。試看出 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 之值, 並依定義證明之。
3. 設 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2}$, $n \geq 1$。試求 $\lim_{n\to\infty} a_n$。
4. 設 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 2}$, $n \geq 1$。試證 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 並猜出其極限值。
5. 上題中若改爲 $a_1 = 10$, 其餘不改變, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 是否存在? 若存在極限值應爲何?

   若 $a_1 = 100$ 呢?
6. (i) 試求 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$。　(ii) 設 $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2.5}}$, $n \geq 1$。利用(i), 試證 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。
7. 試依定義證明 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x+2} = \infty$。
8. 試依定義證明 $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4+x^2} - x) = 0$。
9. 試依定義證明 $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$。
10. 試證實數集合爲不可數。