八十九學年度第一學期　微積分　測驗二

題　目　及　答　案　卷

學系: _____　姓名: _____　學號: _____　得分: _____

考試日期: 89年12月11日　　教師: 黃文璋

第1-2題: 每題15分, 第3-9題: 每題10分

1. 令$f(x) = x^4 \sin \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ 。

   (i) 試定義$f(0)$使$f(x)$在$x = 0$連續 。(3分)　給了$f(0)$後,

   (ii) 試求$f^{'}(x)$, (5分)

   (iii) 試討論$f^{'}(x)$之連續性及可微性 。(7分)

2. 試求(i) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{x^2}^{\sin\sqrt{x}} \sqrt{2+\cos t}dt$, (ii) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}dx$, (iii) $\displaystyle\int x^2 \cos x^3 (1+\sin x^3)^{\frac{3}{2}} dx$ 。

3. 試求$x^2 + xy + y^2 = 3$在$(x, y) = (1, 1)$之切線 。

4. 設n爲一正奇數, $a < 0$ 。試證方程式$x^n = a$恰有一負根 。

5. 設函數$f(x)$在$x = 0$連續, 且$f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in R$ 。試證f在R上連續 。

6. 設f在$[0, 1]$連續, 且f只取有理數值 。若$f(1) = 1$, 試證$f(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$ 。

7. 設f爲一非負函數, 且在$[a, b]$可積 。試證若$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, 則在每一$f$之連續點, f之值爲0 。

8. 對一函數f, 定義

$$D^* f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^2(x+h) - f^2(x)}{h} \text{ 。}$$

   給二函數f, g,

   (i) 求$D^*(f + g), D^*(f - g), D^*(fg), D^*(f/g)$;

   (ii) 以Df來表示$D^* f$;

   (iii) 那種函數f滿足$D^* f = Df$?

9. 三個月的大學生活有感(300字以上) 。