

一百零二學年度第二學期 機率與統計(二) 測驗二

考試日期及時間：103年5月19日10:10–11:50 教師：黃文璋

每題20分，該有之步驟須附上。

1. 設 X 與 Y 獨立， X 有 $\mathcal{N}(2, 9)$ 分佈， Y 有 $\mathcal{N}(-1, 4)$ 分佈。令 $T = 2X - 4Y$ ，試利用

- (i) X 與 Y 造出 T_1 分佈；
- (ii) 適當的不等式，求 T 介於 -7 與 23 之間之機率的一下界。

2. 設 X_1, \dots, X_n 為一組隨機樣本。

- (i) 試證 $\bar{X}_{n+1} = (n\bar{X}_n + X_{n+1})/(n+1)$ ；
- (ii) 利用 (i)，試證 $nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + (n/(n+1))(X_{n+1} - \bar{X}_n)^2$ 。

3. 設 X 有 $\mathcal{F}_{n,m}$ 分佈。令

$$T = \frac{(n/m)X}{1 + (n/m)X}.$$

試求 T 之 p.d.f.，指出此為那一常見分佈，並給出參數。

4. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈所產生之隨機樣本。試證 $nX_{(1)}$ 與 X 有相同的分佈。

5. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $\mathcal{U}[-2, 3]$ 分佈所產生之隨機樣本，令 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ 表其順序統計量。令 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 。

- (i) 試求 R 之 p.d.f.；
- (ii) 試問 $X_{(n)}$ 機率收斂至那一 r.v.，並給出證明。