

一百零二學年度第二學期 機率與統計(二) 測驗一

考試日期及時間：103年4月7日 10:10–11:50

教師：黃文璋

每題20分，該有之步驟須附上。

1. 設 X 與 Y 獨立，且皆有 $\mathcal{N}(0, 1)$ 分佈。試分別求(i) X/Y ，(ii) $X/(X + Y)$ 之分佈，指出此為那一常見分佈，並給出參數。
2. 設 $Y|N$ 有 $\mathcal{B}(N, p)$ 分佈， $N|\Lambda$ 有 $P(\Lambda)$ 分佈，且 Λ 有 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分佈，其中 α 為正整數。試求 Y 之非條件分佈，指出此為那一常見分佈，並給出參數。
3. 設 (X, Y) 之聯合p.d.f. 為

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^3e^{-x(1+y)}, \quad x, y > 0。$$

試求

- (i) $f_X(x)$;
 - (ii) $f_Y(y)$;
 - (iii) $Y|X = x$ 之分佈， $x > 0$ ，指出此為那一常見分佈，並給出參數；
 - (iv) $X|Y = y$ 之分佈， $y > 0$ ，指出此為那一常見分佈，並給出參數。
4. 設 (X, Y) 之聯合p.d.f. 為 $f(x, y) = 24xy$ ， $x, y \geq 0$ ， $x + y \leq 1$ 。試求
 - (i) $\text{Cov}(X, Y)$;
 - (ii) $\rho(X, Y)$;
 - (iii) $\text{Var}(2X - 3Y)$;
 - (iv) $\text{Cov}(2X + 3Y, X - 2Y)$ 。
 5. 設 (X_1, X_2, X_3, X_4) 之聯合p.d.f. 為

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 24e^{-x_1 - x_2 - x_3 - x_4}, \quad 0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4。$$

令 $U_1 = X_1, U_2 = X_2 - X_1, U_3 = X_3 - X_2, U_4 = X_4 - X_3$ 。

- (i) 試求 (U_1, U_2, U_3, U_4) 之聯合p.d.f.;
- (ii) 分別給出 U_1, U_2, U_3, U_4 之分佈;
- (iii) 試求 $\text{Cov}(U_1 + U_2 + U_3, U_2 + U_3 + U_4)$;
- (iv) 試求 $\text{Var}(4U_1 + 3U_3 + 2U_2 + U_4)$ 。