一百零二學年度第二學期　機率論(一)　測驗一

考試日期及時間：103年4月22日10:10–12:00　　教師：黃文璋

每題20分, 該有之步驟須附上。

1. 試給3個事件A, B, C, 其中A與B, A與C皆獨立, 但A與$B \cup C$不獨立。

2. 設有n個袋子, 第r個袋子中有$r-1$個紅球及$n-r$個白球, $r = 1, \cdots, n$。隨機選一袋, 並自該袋中隨機取二球(每次取出後不放回)。試求(並化簡)

   (i) 所取第二個球為白球之機率;

   (ii) 若取出之第一個球為白球, 則所取第二個球為白球之機率。

3. 設$X_1, \cdots, X_n$為 i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$分佈之r.v.'s, $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$表其順序統計量。令$X_{(0)} = 0$, $X_{(n+1)} = 1$。又令$U_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}$, $1 \le k \le n+1$。

   (i) 試求U_k之p.d.f.; (10分)

   (ii) 試指出U_k有那一常見分佈, 並給出參數; (5分)

   (iii) 試求$P(U_k > t)$, $0 \le t \le 1$。(5分)

4. 設X_1, Y_1, X_2, Y_2為i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$分佈之r.v.'s。在$x-y$平面上, 令C_1為以$(0,0)$為圓心, (X_1, Y_1)在圓周上之圓; C_2為以$(0,0)$為圓心, (X_2, Y_2)在圓周上之圓。試求二圓面積差小於1之機率。

5. 設$X_1, X_2, \cdots$為獨立, 且X_i有$\mathcal{U}(0,i)$分佈, $i \ge 1$。試求

   (i) $P(X_n < X_{n-1} < \cdots < X_2 < X_1)$, $n \ge 2$;

   (ii) $P(X_1 < X_2 < X_3)$。

6. 設有一機率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 其中$\Omega = (0,1]$, $\mathcal{F}$為包含Ω上所有子區間之最小的σ-體, 且$P(I) = I$之長度, 其中I為Ω之一子區間。令$X(\omega) = \omega$, $\forall \omega \in \Omega$,

$$Y(\omega) = \begin{cases} 3/2, & \omega \in (0, 1/2], \\ 1/2, & \omega \in (1/2, 1]。 \end{cases}$$

   試分別求(i) Y, (ii) $X+Y$之分佈函數。