

# 一百零二學年度第一學期 機率與統計(一) 測驗二

考試日期及時間：102年12月16日 10:10–11:50 教師：黃文璋

每題20分，該有之步驟須附上。

1. 持續投擲二公正骰子，直至點數和第3次超過9才停止。
  - (i) 試給出所需投擲數為15之機率；
  - (ii) 試給出所需投擲數之期望值。
2. 設 $A, B$ 二支球隊進行5戰3勝制的比賽，每場 $A$ 勝的機率為0.6,  $B$ 勝的機率為0.4, 各場比賽之結果為相互獨立。令 $X$ 表比賽所需場數。
  - (i) 試求 $X$ 之機率密度函數 $f$ ；
  - (ii) 試求 $X$ 之分佈函數 $F$ ；
  - (iii) 試求 $E(X)$ ；
  - (iv) 試分別求 $A$ 及 $B$ 贏得比賽之機率。
3. 設 $X$ 有 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 分佈， $Y$ 有 $\chi_n^2$ 分佈。
  - (i) 試求 $E(X^k)$ ，並給出此期望值存在時 $k$ 的範圍；
  - (ii) 試求 $\phi(s) = E(e^{-sX})$ ,  $s \geq 0$ ；
  - (iii) 試利用(i)求 $E(1/Y)$ ，化簡之，並給出此期望值存在時 $n$ 的範圍；
  - (iv) 試利用(i)求 $E(Y^3)$ ，化簡之，並給出此期望值存在時 $n$ 的範圍；
  - (v)  $E(t^Y)$ ,  $0 < t \leq 1$ 。
4. 設 $X$ 有自0開始之 $\mathcal{G}e(p)$ 分佈,  $0 < p < 1$ 。又設 $Y$ 有 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈。
  - (i) 試求 $P(X \geq k)$ , 其中 $k \geq 0$ 為一整數；(5分)
  - (ii) 試求 $\text{Var}(Y)$ ；(5分)
  - (iii) 令 $Z = [Y]$ , 其中 $[ \cdot ]$ 表最大整數函數，試求 $Z$ 之機率密度函數，並指出此為那一常見分佈，參數為何。(10分)
5. 設 $X$ 有 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈。
  - (i) 試求 $M(t) = E(e^{tX})$ ,  $t \in R$ ；
  - (ii) 試利用(i)求 $E(X)$ ；
  - (iii) 試利用(i)求 $\text{Var}(X)$ ；
  - (iv) 當 $\mu = 0$ , 試求 $E(X^{2k-1})$ , 其中 $k$ 為一正整數。