

一百零二學年度第一學期 機率與統計(一) 測驗一

考試日期及時間：102年10月28日10:10–12:00 教師：黃文璋

第1-4題各15分，第5-6題各20分，該有之步驟須附上。

1. 設 $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$,

- (i) 試寫出包含 $\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}$ 之最小 σ -體 \mathcal{F} 。
- (ii) 試在 (i) 中之 \mathcal{F} 上，定義一機率函數 P ，滿足 $P(\{a\}) = 0.2, P(\{d, e\}) = 0.5$ 。

2. 投擲二公正的骰子。對一固定的 $i, i \in \{1, 2, \dots, 6\}$,

- (i) 試證點數和為 7，與第一顆骰子出現點數 i ，二事件獨立；
- (ii) 試判斷點數和不為 7，與第一顆骰子不出現 i ，二事件是否獨立。

3. 有 A, B, C 三扇門，其中一扇門後有汽車，另兩扇門後各只有一頭山羊，你選定一扇門，假設是 A ，主持人打開 B, C 中的一扇門，假設是 B ，發現門後是山羊，問你要不要更改選擇 C 門？主持人開門方式如下。當 B, C 二扇門後，有一為汽車，主持人便打開門後無汽車的那扇門；當 B, C 二扇門後皆為山羊，主持人以 p 的機率打開 B 門，以 $1 - p$ 的機率打開 C 門。

- (i) 試求更改選擇後得到汽車之機率。
- (ii) 試問更改與不更改選擇，何者得到汽車之機率較大？
- (iii) 試問 p 為何值時，不更改選擇得到汽車之機率最大？

4. 試求一常數 c ，使 $cg(x), x \in R$ ，為一 p.d.f.，其中

$$g(x) = \begin{cases} -xe^x, & x < 0, \\ x^3e^{-2x^4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{1+x^2}, & x \geq 1. \end{cases}$$

5. 設 r.v. X 之 p.d.f. 為

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

- (i) 試求出 X 之 d.f. $F(x), x \in R$ 。
- (ii) 試繪 F 之圖形，並驗證 (i) 中之 F 確為一 d.f.。
- (iii) 試求 $P(X \leq 1)$ 。
- (iv) 試求 $E(X)$ 。
- (v) 試求 $E(X^2)$ 。

6. 設 X 之 p.d.f. 為 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$ 。令 $Y = |X|^3$ 。

- (i) 試求 Y 之 p.d.f. $g(y), y \in A$, 並給出 A 。
- (ii) 試驗證 (i) 中之 $g(y), y \in A$, 確為一 p.d.f.。
- (iii) 試求 $E(X)$ 。
- (iv) 試求 $E(X^2)$ 。