一百零二學年度第一學期　機率論(二)　測驗二

考試日期及時間：103年1月14日10:10–12:00　　教師：黃文璋

每題20分, 該有之步驟須附上。

1. 設$\{X_n,\ n \geq 1\}$為每對無相關, 且X_n有$\mathcal{P}(1+1/n)$分佈, $n \geq 1$。試問$n \to \infty$時, $\overline{X}_n$是否會機率收斂至那一r.v.?

2. 設$\{X_n, n \geq 1\}$為i.i.d.的r.v.'s, 且$E(X_1) = 0$, $\mathrm{Var}(X_1) = 1$。試證
$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{(\sum_{j=1}^n X_j^2)^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)\text{。}$$

3. 設$\{Z_n, n \geq 1\}$為一數列獨立的r.v.'s, 且
$$P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 1) = \begin{cases} 1/n^2, & \text{若}n\text{為偶數}, \\ 1/n, & \text{若}n\text{為奇數}\text{。} \end{cases}$$

   (i) 試證$Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$, 但$\{Z_n, n \geq 1\}$不幾乎確實地收斂至任一r.v.。

   (ii) 試給一幾乎確實地收斂的子數列$\{Z_{n_k}, k \geq 1\}$。

4. 設$\{X_i,\ i \geq 1\}$為i.i.d.$\mathcal{U}[0,1]$分佈之r.v.'s。令$A_i = \{X_i < X_{i+1} < X_{i+2}\}$, $i \geq 1$。試證$P(A_i, \text{i.o.}) = 1$。

5. 設有r.v.'s $\{X_n, n \geq 1\}$。對$n \geq 1$, X_n之p.d.f.為
$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)},\ x \in R\text{。}$$

   (i)試證$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, 並給出$X$。

   (ii)對(i)中之X, 試給出使$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$之$p$的集合。